This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

600025111G

PRESS
SHELF
No

C.
d. 137
3

C. G. J. Jacobi

Mathematische Werke.

Band III.

Berlin,
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1871.

C. G. J. JACOBI

OPUSCULA MATHEMATICA.

VOLUMEN III.

BEROLINI,
TYPIS ET IMPENSIS GEORGII REIMERI.
1871.

VORWORT.

In diesem dritten Bande von Jacobi's mathematischen Werken sind 14 Abhandlungen aus seinem wissenschaftlichen Nachlass enthalten.

Als im Jahre 1855 bei der Uebersiedelung Lejeune Dirichlet's von Berlin nach Göttingen Jacobi's nachgelassene Papiere in meine Hände übergingen, verband ich mich zur Sichtung und zur Herausgabe des für die Bekanntmachung geeigneten Theiles derselben mit den Herren Richelot, Heine, Clebsch, Hermes, Luther und Cohn, welche sich sämmtlich als directe oder indirecte Schüler Jacobi's der mühevollen Arbeit bereitwillig unterzogen.

Zu den Schwierigkeiten, welche nachgelassene Schriften der Herausgabe bieten, würde sich hier eine neue gesellt haben, wenn für die Veröffentlichung der Abhandlungen eine systematische Ordnung nach den Disciplinen hätte inne gehalten werden sollen. Es wurde vorgezogen, ohne Rücksicht auf die Anordnung, jede Arbeit im Journal für Mathematik erscheinen zu lassen, sobald sie druckfertig vorlag. So sind die einzelnen Aufsätze dieses Bandes in derselben Reihenfolge, wie sie hier vorliegen, nach und nach in die inzwischen herausgekommenen Bände LIII bis LXXIII meines Journals eingerückt worden.

Es wird den Mathematikern erwünscht sein, diese nachgelassenen Abhandlungen ebenso gesammelt vor sich zu sehen, wie es für die von Jacobi selbst zum Abschluss gebrachten durch die beiden ersten Bände seiner mathematischen Werke geschehen ist.

Dieser Band erschöpft das unter Jacobi's Manuscripten als werthvoll Erkannte noch nicht. Es bleibt vielmehr eine Anzahl von Arbeiten, vorzüglich aus dem Gebiete der Geometrie, der künftigen Veröffentlichung vorbehalten.

Berlin, im April 1871.

C. W. Borchardt.

Mathematische Abhandlungen.

INDEX.

(Sämmtliche Abhandlungen gehören zu dem Nachlass *C. G. J. Jacobi*'s und sind auch in Borchardt's „Journal für die reine und angewandte Mathematik Band LIII—LXXIII" erschienen).

1. Ueber Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niedereren Grades haben. Mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*. . . . . Seite 1
2. Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Mitgetheilt durch Denselben. . . . . — 25
3. Ueber einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen. Mitgetheilt durch Denselben. . . . . — 31
4. Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie. Communiquée par M. *E. Luther*. . . . . — 37
5. *C. G. J. Jacobi*'s Ableitung der in seinem Aufsatze: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie" entbaltenen Formeln. Mitgetheilt von Herrn *E. Luther*. . . . . — 44
6. Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen. Mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*. . . . . — 68
7. Ueber die Substitution
$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$$
und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform. Mitgetheilt durch Herrn *F. Richelot*. . . . . — 83
8. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Mitgetheilt durch Herrn *E. Heine*. . . . . — 97
9. Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben. Mitgetheilt durch Herrn *S. Cohn*. — 114

10. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. Protulit ***A. Clebsch.*** . . . . — 129
11. De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque. Protulit ***C. W. Borchardt.*** . . . . . — 310
12. Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone. Bruchstück, mitgetheilt durch Herrn ***O. Hermes.*** . . . . . — 334
13. Ueber die Auflösung der Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u.$$

Mitgetheilt durch Herrn ***E. Heine.*** . . . . . — 338
14. Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus ***drei*** vorhergehenden gebildet wird. Mitgetheilt durch Herrn ***E. Heine.*** — 366
15. Geometrische Theoreme. Bruchstücke, mitgetheilt durch Herrn ***O. Hermes.*** . — 402

1.

Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niedereren Grades haben.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*.)

1.

Lösung der Aufgabe nach der Methode der Entwicklungs-Coefficienten.

Wenn man eine Function von x nach den Potenzen eines endlichen Polynoms:

$$P = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

entwickelt, so kann diese Entwicklung

$$(1.) \qquad \alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3 + \cdots = f(x)$$

wenn α, α_1, α_2, ... constante, nicht vieldeutige Coefficienten bedeuten, für jeden gegebenen Werth von P nur für *einen* der n Werthe von x gültig sein, welche dem gegebenen Werthe von P entsprechen. Convergirt nämlich die Reihe für einen gegebenen Werth $P = b$, so hat sie einen vollkommen bestimmten Werth; die Function $f(x)$ aber erhält, wenn man für x die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = b$ setzt, n verschiedene Werthe, und es kann nur einer derselben mit dem Werthe der Reihe

$$\alpha + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \cdots$$

übereinstimmen.

Wenn aber die Coefficienten keine Constanten, sondern Polynome des $(n-1)$ten Grades von x bedeuten, so kann die Gleichung (1.) für alle n Werthe von x gelten, welche demselben Werthe von P entsprechen. Bezeichnet man in diesem Falle mit

$$X, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_{n-1}$$

Polynome vom $(n-1)$ten Grade, so kann man der Reihe (1.) immer die Form

$$XS + X_1 S_1 + \cdots + X_{n-1} S_{n-1} = f(x)$$

geben, in welcher S, S_1, ... S_{n-1} nach den Potenzen von P fortschreitende

Reihen mit *constanten* Coefficienten bedeuten, und es wird die Gleichung (1.) für alle Werthe von x gelten, für welche die Gröfse P solche Werthe erhält, dafs die n Reihen S, S_1 ... convergiren.

Wenn die Function $f(x)$ ebenfalls ein endliches Polynom ist, so wird die Reihe (1.) immer abbrechen.

Man findet dann den Coefficienten α als Rest der Division von $f(x)$ durch P; nennt man den Quotienten dieser Division $f_1(x)$, so findet man α_1 als Rest der Division von $f_1(x)$ durch P, u. s. f.

Diese Methode, die Coefficienten α, α_1, etc. zu bestimmen, ist aber nicht mehr anwendbar, wenn $f(x)$ nach den Potenzen von x *ins Unendliche* fortschreitet.

Für diesen Fall kann man den Coefficienten des allgemeinen Gliedes α_i, wenn man die Möglichkeit der Entwicklung (1.) voraussetzt, durch folgende Betrachtungen finden.

Man dividire nämlich die Gleichung (1.), in welcher $f(x)$ eine nach den ganzen positiven Potenzen von x entwickelte Reihe bedeute, durch P^{i+1}, und entwickle jeden Term des hierdurch erhaltenen Ausdrucks:

$$(2.) \quad \frac{\alpha}{P^{i+1}} + \frac{\alpha_1}{P^i} + \cdots + \frac{\alpha_i}{P} + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}P + \text{etc.} = \frac{f(x)}{P^{i+1}}$$

nach den *absteigenden* Potenzen von x, so erhält man aus der Entwicklung der Terme

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}P + \cdots \text{ etc.}$$

gar keine negativen Potenzen von x; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ entstehenden negativen Potenzen von x beginnen von $\frac{1}{x}$, weil die Polynome α, α_1, etc. um einen Grad niedriger als P sein sollen; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_{i-1}}{P^i}$ hervorgehenden negativen Potenzen von x beginnen mit $\frac{1}{x^{n+1}}$, u. s. f.

In dem Producte

$$f(x)\frac{1}{P^{i+1}},$$

in welchem der eine Factor $f(x)$ nach den aufsteigenden, der andre $\frac{1}{P^{i+1}}$ nach den absteigenden Potenzen von x entwickelt ist, kann daher das Aggregat derjenigen Terme, welche in

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \cdots \quad \frac{1}{x^n}$$

multiplicirt sind, nur aus der Entwicklung eines einzigen Terms, des dem Bruche $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$ gleichen Ausdrucks (2.), nämlich des Terms $\frac{\alpha_i}{P}$, hervorgehen, weil, wie man gesehen hat, jeder Term $\frac{\alpha_{i+k}}{P^{i-k}}$ nur positive Potenzen von x, und jeder Term $\frac{\alpha_{i-k}}{P^{i+k}}$ nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als $\frac{1}{x^n}$ giebt

Wenn man demnach dieses Aggregat mit:

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}$$

bezeichnet, so hat man:

$$(3.)\quad \frac{\alpha_i}{P} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots \text{ etc.}$$

wo die auf $\frac{A_n}{x^n}$ folgenden Glieder nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als die $n$te enthalten. ***Multiplicirt man daher den Theil der Entwicklung von*** $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, ***welcher nur die negativen Potenzen von*** x ***enthält mit*** P ***und behält in dem Producte nur die positiven Potenzen von*** x ***bei, so erhält man den gesuchten Coefficienten*** α_i. Denn dieser Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$ weicht, dem Vorstehenden zufolge, von der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ nur in den Potenzen von $\frac{1}{x}$ ab, welche höher als die $n$te sind, und diese geben mit P multiplicirt, keine positive Potenz von x.

Wenn $F(x)$ eine Reihe ist, welche gleichzeitig positive und negative Potenzen von x enthält, so kann man den blos die negativen Potenzen von x enthaltenden Theil dieser Reihe besonders darstellen. Derselbe wird nämlich, wie ich in den Disquis. Analyt. de fractionibus simplicibus gezeigt habe, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{F(h)}{x-h},$$

wenn man diese Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von h, den absteigenden von x anstellt.

Hiernach wird für unsern Fall der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, welcher nur die negativen Potenzen von x enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$

in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}(x-h)}.$$

Um α_i zu erhalten, hat man diesen Ausdruck, zufolge des im Vorstehenden Bewiesenen, mit P zu multipliciren, und im Producte:

$$\frac{P}{x-h} = P\left(\frac{1}{x}+\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}+\frac{h^3}{x^4}+\cdots \text{ etc.}\right)$$

nur die positiven Potenzen von x, die Constante mit eingeschlossen, beizubehalten. Wenn man:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1} \\ P_2 &= p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= p_n \end{aligned}$$

setzt, so folgt hieraus, dafs α_i der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von $\{P_1+P_2h+P_3h^2+\cdots+P_nh^{n-1}\}\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$ ist. Giebt man demnach dem Polynome $(n-1)$ten Grades, welchem der gesuchte Coefficient α_i gleich ist, die Form:

$$\begin{aligned} &\beta_1^{(i)}\{p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1}\} \\ &+\beta_2^{(i)}\{p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2}\} \\ &+\beta_3^{(i)}\{p_3+p_4x+\cdots\cdots\cdots+p_nx^{n-3}\}+\cdots+\beta_n^{(i)} = \alpha_i \end{aligned}$$

wo $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$, $\ldots$ $\beta_n^{(i)}$ Constanten sind, so wird $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von $\frac{1}{h^k}$ in der Entwicklung von

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$$

oder, wenn man x für h schreibt gleich *dem Coefficienten von* $\frac{1}{x^k}$ *in der Entwicklung des Bruchs*

$$\frac{f(x)}{P^{i+1}}.$$

Wenn $f(x)$ eine unendliche Reihe ist, so wird $f(x)\frac{1}{P^{i+1}}$ ein Product, dessen einer Factor nach den positiven, der andre nach den negativen Potenzen von x in's Unendliche fortschreitet, und daher jeder Coefficient dieses Productes ebenfalls eine unendliche Reihe. Man kann aber, wenn man die Factorenzerfällung von P kennt, die Coefficienten der negativen Potenzen in diesem Producte oder die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ auf folgende Art durch einen endlichen

Ausdruck darstellen. Zufolge der von mir in den angeführten Untersuchungen über Partialbrüche gegebenen Sätze wird nämlich der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, welcher blofs die negativen Potenzen von x enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung der Summe:

$$\Sigma \frac{f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}(x-x_1-h)},$$

wenn man diese Summe über alle Wurzeln x_1 der Gleichung $P=0$ ausdehnt, und die Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von h, den absteigenden von x anstellt *). Es wird daher der Coefficient von $\frac{1}{x^k}$ in der Entwicklung von $\frac{F(x)}{P^{i+1}}$ oder die Gröfse $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von

$$\Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1} f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}}.$$

Setzt man $P=p_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, so wird $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von h^i in der Entwicklung von

$$\frac{1}{p_n^{i+1}} \Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1} f(x_1+h)}{\{(x_1+h-x_2)(x_1+h-x_3)\dots(x_1+h-x_n)\}^{i+1}}$$

oder

$$\beta_k^{(i)} = \frac{1}{p_n^{i+1}} \Sigma \frac{\partial^i \frac{x_1^{k-1} f(x_1)}{\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots i.\partial x_1^i}$$

wo man während der Differentiationen nach einer der Gröfsen $x_1, x_2, \dots, x_n$ immer die andern sämmtlich als constant anzusehen hat.

§. 2.

Lösung der Aufgabe mittelst der *Lagrange*schen Reihe.

Man kann zu diesen Resultaten auch durch folgende Betrachtungen mit Hülfe der *Lagrange*schen Reihe gelangen.

Wenn man das Polynom

$$P = y$$

*) Aehnliche Sätze hat Hr. *Cauchy* fast um dieselbe Zeit in seinen *Exercices d'Analyse* aufgestellt, und ihnen eine sehr grofse Entwicklung gegeben, so dafs er es für nöthig gehalten hat, dafür neue Benennungen und Zeichen einzuführen, und daraus einen eignen Calcul zu machen, den er *Calcul des Résidus* nennt.

setzt, so erhält die vorgelegte Entwicklung von $f(x)$ die Form einer ganzen Function von x vom $(n-1)$ten Grade, deren Coefficienten nach den ganzen, positiven Potenzen von y aufsteigende Reihen sind. Das Eigenthümliche dieser Entwicklung besteht darin, dafs sie gültig bleiben soll, wenn man für denselben Werth von y für die Gröfse x jede Wurzel der Gleichung $P = y$ setzt. Bezeichnet man daher die n Wurzeln der Gleichung $P = y$ mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n,$$

so erfordert die hier vorgelegte Aufgabe, zuerst eine ganze Function von x vom $(n-1)$ten Grade zu bestimmen, welche, wenn man für x nach einander die Werthe $X_1, X_2, \ldots X_n$ setzt, respective die Werthe

$$f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

annimmt; die Coefficienten dieser Function, welche auf bekannte Art durch die Gröfsen

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n, \quad f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

ausgedrückt werden, sind dann mittelst der Gleichung $P = y$ nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln, was, wie ich zeigen will, mit Hülfe des *Lagrange*schen Lehrsatzes geschehen kann.

Aus der Gleichung

$$P - y = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n - y = p_n (x - X_1)(x - X_2) \ldots (x - X_n)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{P-y}{x-X_1} &= p_n (x - X_2)(x - X_3) \ldots (x - X_n) \\ &= p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1} \\ &\quad + X_1 (p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) \\ &\quad + X_1^2 (p_3 + p_4 x + \cdots + p_n x^{n-3}) + \cdots + p_n X_1^{n-1} \end{aligned}$$

Setzt man $P'(x) = \frac{dP}{dx}$, so wird

$$P'(X_1) = p_n (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \ldots (X_1 - X_n).$$

Mittelst dieser und der ähnlich gebildeten Gleichungen kann die bekannte *Lagrange*sche Formel, durch welche eine ganze Function vom $(n-1)$ten Grade ausgedrückt wird, welche für $x = X_1, X_2, \ldots X_n$ respective die Werthe $f(X_1), f(X_2), \ldots f(X_n)$ annimmt,

$$f(X_1)\cdot\frac{(x-X_2)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)\dots(X_1-X_n)}$$
$$+f(X_2)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_2-X_1)(X_2-X_3)\dots(X_2-X_n)}$$
$$+\ \dots\dots\dots\dots$$
$$+f(X_n)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_2)\dots(x-X_{n-1})}{(X_n-X_1)(X_n-X_2)\dots(X_n-X_{n-1})}$$

folgendermafsen dargestellt werden:

$$(p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\left\{\frac{f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{f(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$+(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\left\{\frac{X_1f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_nf(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$+(p_3+p_4x+\dots+p_nx^{n-3})\left\{\frac{X_1^2f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^2f(x_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^2f(X_n)}{P'(X_n)}\right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+p_n\left(\frac{X_1^{n-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{n-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{n-1}f(X_n)}{P'(X_n)}\right).$$

Die n Summen rechter Hand hat man nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln. Der Coefficient von y^i in der Entwicklung der Summe:

$$\frac{X_1^{k-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{k-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{k-1}f(X_n)}{P'(X_n)}$$

ist die im ersten §. mit $\beta_k^{(i)}$ bezeichnete Gröfse.

Setzt man

$$\int x^{k-1}f(x)dx = \psi_k(x)$$

und bezeichnet man mit Y_k die Summe:

$$\psi_k(X_1)+\psi_k(X_2)+\dots+\psi_k(X_n) = Y_k,$$

so erhält der obige Ausdruck, durch welchen $f(x)$ dargestellt worden ist, die einfachere Form:

$$(p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\frac{dY_1}{dy}$$
$$+(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\frac{dY_2}{dy}+\dots+p_n\frac{dX_n}{dy} = f(x)$$

Es wird daher $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von y^i in der Entwicklung von $\frac{dY_k}{dy}$, oder *man erhält $\beta_k^{(i)}$, wenn man den Coefficienten von y^{i+1} in der Entwicklung von Y_k mit $i+1$ multiplicirt.*

Um jeden der einzelnen Terme

$$\psi_k(X_1), \quad \psi_k(X_2) \quad \ldots \quad \psi_k(X_n),$$

deren Aggregat mit Y_k bezeichnet worden ist, nach den ganzen positiven Potenzen von y entwickeln zu können, mufs man, wenn man hierzu den *Lagrange*schen Lehrsatz benutzen will, die Gleichung $P = y$ auf verschiedene Arten auf die von *Lagrange* zu Grunde gelegte Form:

$$\alpha - x + y\varphi(x) = 0$$

bringen. Die *Lagrange*sche Entwicklung bezieht sich nämlich auf diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche für $y = 0$ den Werth α erhält oder einen solchen Werth, für welchen nicht zugleich die Function $\varphi(x)$ unendlich wird. Setzt man

$$P = p_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

so reduziren sich die Wurzeln der Gleichung $P = y$ für $y = 0$ auf $x_1, x_2, \ldots x_n$, und ich will X_m diejenige nennen, welche für $y = 0$ den Werth x_m erhält. Um eine auf diese Wurzel X_m bezügliche Entwicklung mittelst des *Lagrange*schen Lehrsatzes zu erhalten; mufs man der obigen Bemerkung zufolge die Gleichung $P = y$ folgendermafsen darstellen:

$$x_m - x + \frac{y}{p_n(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1})(x - x_{m+1})\ldots(x - x_n)} = 0,$$

so dafs für die verschiedenen Wurzeln $X_1, X_2, \ldots X_n$ die Gröfse α in der *Lagrange*schen Gleichung respective die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ erhält, und für $\varphi(x)$ die Functionen

$$\frac{x - x_1}{P}, \quad \frac{x - x_2}{P}, \quad \ldots \quad \frac{x - x_n}{P}$$

zu setzen sind.

Die *Lagrange*sche Reihe giebt, wenn $\psi(x)$ eine beliebige Function von x und $\psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$ ist,

$$\psi x = \psi\alpha + y\varphi\alpha\psi'\alpha + y^2\frac{d.(\varphi\alpha)^2\psi'\alpha}{2d\alpha} + y^3\frac{d^2(\varphi\alpha)^3\psi'\alpha}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man hierin:

$$\psi x = \psi_k(x) = \int x^{k-1} f(x)\,dx$$

so erhält man

$$\psi_k(x) = \psi_k(\alpha) + y\alpha^{k-1} f\alpha\varphi\alpha + y^2\frac{d\alpha^{k-1} f\alpha(\varphi\alpha)^2}{2d\alpha} + y^3\frac{d^2\alpha^{k-1} f\alpha(\varphi\alpha)^3}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man in der Reihe rechts vom Gleichheitszeichen:

$$\alpha = x_1, \quad \varphi x = \frac{1}{p_n(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)},$$

so erhält man die Entwicklung von $\psi(X_1)$ und auf ähnliche Art die Entwicklung von $\psi(X_2)$, $\psi(X_3)$ ... $\psi(X_n)$. Die Summe aller auf diese Art erhaltenen Reihen giebt die Entwicklung von Y_i. Multiplicirt man den Coefficienten von y^i in dieser letzteren mit $i+1$, so erhält man:

$$\beta_k^{(i)} = \Sigma \frac{\partial^i \frac{x_1^{k-1} f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2.3\dots i.\partial x_1^i},$$

wenn man während der Differentiation nach x_1 die Gröfsen x_2, x_3, ... x_n als constant betrachtet, und die Summation noch auf die $n-1$ andern Ausdrücke erstreckt, die aus dem unter dem Summenzeichen befindlichen durch Vertauschung von x_1 mit x_2, x_3, ... x_n erhalten werden, welches das im ersten §. gefundene Resultat ist.

Hat P den Factor $(x-x_1)^\mu$ und ist durch keine höhere Potenz von $x-x_1$ theilbar, so erhalten für $y=0$ gleichzeitig μ Wurzeln der Gleichung $P=y$ den Werth x_1. Bezeichnet man diese Wurzeln mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots \quad X_\mu,$$

so mufs man, um durch den *Lagrange*schen Lehrsatz die Summe

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

nach den ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln, aus der Gleichung $P=y$ durch Ausziehung der μten Wurzel die Gleichung

$$x_1 - x + \frac{y^{\frac{1}{\mu}}}{p_n^{\frac{1}{\mu}}\{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)\}^{\frac{1}{\mu}}} = 0$$

ableiten, welche für die verschiedenen Werthe der μten Wurzel μ verschiedene Gleichungen von der Form $\alpha - x + y^{\frac{1}{\mu}}\varphi x = 0$ giebt, welche sich auf die verschiedenen Wurzeln X_1, X_2, ... X_μ beziehen.

Der *Lagrange*sche Lehrsatz giebt die Entwicklung einer beliebigen Function von jeder dieser Wurzeln nach den ganzen positiven Potenzen von $y^{\frac{1}{\mu}}$ und man erhält aus einer dieser Entwicklungen sämmtliche μ, wenn man für $y^{\frac{1}{\mu}}$ seine μ Werthe setzt. Die Entwicklung der Summe:

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

erhält man daher vermöge der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit, wenn man in der Entwicklung einer der Functionen $\psi(X_1)$ etc. die gebrochenen Potenzen von y fortläfst und die ganzen Potenzen von y mit μ multiplicirt. Der Coefficient von y^{i+1} in der Entwicklung dieser Summe, mit $i+1$ multiplicirt, wird daher

$$\frac{\partial^{\mu i+\mu-1}.\dfrac{x_1^{k-1}f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots(\mu i+\mu-1)\,\partial x^{\mu i+\mu-1}},$$

was mit dem im ersten §. gegebenen Resultate übereinstimmt. Wenn die Function $f(x)$ vieldeutig ist, so kann man willkürlich darüber bestimmen, welchen ihrer verschiedenen Werthe sie für jede der Wurzeln der Gleichung $P=0$ annehmen soll, und für jede dieser Annahmen werden die Coefficienten α_i der polynomischen Entwicklung verschieden. Wenn ν die Zahl der Werthe ist, die $f(x)$ für einen gegebenen Werth von x annehmen kann, so erhält man so den verschiedenen möglichen Annahmen entsprechend ν^n verschiedene Entwicklungen.

§. 3.

Anwendung auf rationale gebrochene Functionen.

Wenn die Function, welche nach den Potenzen eines Polynoms P entwickelt werden soll, eine rationale Function ist, so werden die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ rationale symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $P=0$, und können daher durch die Coefficienten des Polynoms P rational dargestellt werden, so dafs es in diesem Falle der Factorenzerfällung von P nicht bedarf. Man kann aber in diesem Falle die vorgelegte Entwicklung auch durch die folgende, ganz verschiedene Methode erhalten.

Es sei die zu entwickelnde Function

$$\frac{U}{V}=f(x),$$

wo U und V ganze rationale Functionen von x sind. Jede dieser Functionen stelle man durch endliche, nach den Potenzen von P fortschreitende Ausdrücke dar,

$$U_0+U_1P+U_2P^2+\dots=U$$
$$V_0+V_1P+V_2P^2+\dots=V,$$

in welchen die Coefficienten U_0, U_1, … etc.; V_0, V_1, … etc. Polynome von niedererem Grade als P sind. Es seien M und N zwei andere ganze

rationale Functionen von x von der Beschaffenheit, dafs

$$MV - NP = 1.$$

Diese Functionen M und N können durch die Methode der unbestimmten Coefficienten oder durch die Verwandlung des Bruches $\frac{V}{P}$ in einen Kettenbruch gefunden werden.

Wenn die Factorenzerfällung von P gegeben ist, findet man M auch dadurch, dafs man $\frac{1}{PV}$ in Partialbrüche zerfällt, und alle Partialbrüche, welche aus den Factoren von P hervorgehen, in *einen* Bruch vereinigt. Der Zähler dieses Bruches wird die Function M. Man hat daher, wenn man die Werthe von V für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, mit

$$V_1, \quad V_2 \quad \ldots \quad V_n$$

bezeichnet,

$$M = P\left\{\frac{1}{P'(x_1)V_1 \cdot (x-x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)V_2 \cdot (x-x_2)} + \cdots + \frac{1}{P'(x_n)V_n \cdot (x-x_n)}\right\}.$$

Hat man auf irgend eine Weise die Function M vom $(n-1)$ten Grade bestimmt, so bringe man die Producte MU und MV auf die Form:

$$u_0 + u_1 P + u_2 P^2 + \cdots \text{etc.} = MU$$
$$1 + v_1 P + v_2 P^2 + \cdots \text{etc.} = MV,$$

in welcher die sämmtlichen Coefficienten $u_0, u_1, u_2, \ldots$ etc., $v_1, v_2, \ldots$ etc. Polynome von niedererem Grade als P sind. Der zu entwickelnde Bruch wird dann:

$$\frac{u_0 + u_1 P + u_2 P^2 + \cdots \text{etc.}}{1 + v_1 P + v_2 P^2 + \cdots \text{etc.}} = \frac{U}{V}$$

Entwickelt man den Ausdruck links nach den Potenzen von P, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von u_0, u_1 etc., v_1, v_2 etc., welche man wieder als Aggregate von Potenzen von P, die in Polynome niedereren Grades multiplicirt sind, darstellen kann, wodurch man die verlangte Entwicklung erhält.

Man kann aber auch bei der Bildung der Coefficienten dieser Entwicklung ein recurrirendes Verfahren befolgen. Ist die gesuchte Entwicklung

$$f_0 + f_1 \cdot P + f_2 \cdot P^2 + f_3 \cdot P^3 + \cdots \text{etc.} = \frac{u_0 + u_1 P + u_2 P^2 + \cdots \text{etc.}}{1 + v_1 P + v_2 P^2 + \cdots \text{etc.}} = \frac{U}{V},$$

wo f_0, f_1, etc. Polynome $(n-1)$ten Grades sind, und kennt man bereits die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots f_i$, so findet man aus ihnen den unmittelbar folgenden

f_{i+1}. Ist nämlich $a_{m,k}$ der Rest und $b_{m,k}$ der Quotient der Division von $f_m . v_k$ durch P, so dafs

$$f_m . v_k = a_{m,k} + b_{m,k} P,$$

so sind die Functionen

$$a_{0,k}, \quad a_{1,k}, \quad \ldots \quad a_{i,k}; \quad b_{0,k}, \quad b_{1,k}, \quad \ldots \quad b_{i,k}$$

gegeben, wenn die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots f_i$ bereits bekannt sind, und man findet aus ihnen den nächst folgenden Coefficienten

$$f_{i+1} = u_{i+1} - \{a_{i,1} + a_{i-1,2} + a_{i-2,3} + \cdots + a_{0,i+1}\} - \{b_{i-1,1} + b_{i-2,2} + b_{i-3,3} + \cdots + b_{0,i}\}.$$

Mittelst dieser Formel kann man aus dem ersten Coefficienten $f_0 = u_0$ die übrigen finden.

Wenn P und V einen gemeinschaftlichen Factor haben, kann die Gleichung

$$MV - NP = 1$$

nicht erfüllt werden, und es kann in der That dann auch die verlangte Entwicklung nicht Statt haben.

Die Aufgabe, einen rationalen Bruch in eine nach den Potenzen eines Polynoms fortschreitende Reihe zu entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind, findet eine Anwendung, wenn man einen Bruch:

$$\frac{L}{P^i Q^k R^l \ldots},$$

in welchem $L, P, Q, R \ldots$ ganze rationale Functionen sind, in eine ganze Function und in andre Brüche zerlegen will, welche die Potenzen von P, Q, R etc. bis zur $i$ten, $k$ten, $l$ten etc. zu Nennern und Zähler von respective niedererer Ordnung als P, Q, R etc. haben. Man erhält nämlich die aus dem Factor P^i hervorgehenden Brüche, wenn man die rationale Function

$$\frac{L}{Q^k R^l \ldots}$$

in der im Vorigen auseinandergesetzten Weise in eine nach den Potenzen von P aufsteigende Reihe entwickelt, deren Coefficienten von niedererem Grade als P sind, diese Entwicklung aber nur bis zur $(i-1)$ten Potenz von P fortsetzt, und durch P^i dividirt. Verfährt man ebenso in Bezug auf Q, R etc., so ist das auf diese Weise erhaltene Aggregat von Brüchen dem vorgelegten Bruche gleich, oder, wenn der Zähler des vorgelegten Bruches von höherem Grade als der Nenner ist, von demselben nur um eine ganze Function ver-

schieden, welche der Quotient der Division des Zählers L durch den Nenner $P^iQ^kR^l\ldots$ ist. Ist L' der Rest dieser Division, so werden die Brüche, in welche der vorgelegte Bruch zerlegt wird, dieselben, wenn man statt des Zählers L den einfacheren L' setzt.

Man kann hiervon bei der Integration der rationalen Functionen Gebrauch machen, wenn der Nenner imaginäre lineäre Factoren hat, und man, um die imaginären Gröfsen zu vermeiden, die reellen trinomischen Factoren und ihre Potenzen zu Nennern der Partialbrüche nimmt.

§. 4.

Anwendung auf gebrochene Potenzen rationaler Functionen.

Ich will jetzt die im Vorigen gegebene Methode auf die Entwicklung einer *gebrochenen* Potenz einer rationalen Function anwenden. Wie man zufolge einer oben gemachten Bemerkung voraussehen kann, wird dies nicht möglich sein, ohne die Wurzeln der Gleichung $P=0$ zu kennen, indem die Entwicklung nur dann bestimmt ist, wenn man festgesetzt hat, welchen ihrer Werthe die zu entwickelnde irrationale Gröfse für jede der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P=0$ annehmen soll.

Um der Aufgabe sogleich eine gröfsere Allgemeinheit zu geben, werde ich annehmen, die zu entwickelnde irrationale Function habe die Form:

$$\sqrt[\nu]{\frac{U^{m\nu-\alpha}U_1^{m_1\nu-\alpha_1}U_2^{m_2\nu-\alpha_2}\ldots}{V^{\beta}V_1^{\beta_1}V_2^{\beta_2}\ldots}}=f(x),$$

wo

$$U,\quad U_1,\quad U_2\quad\ldots;\qquad V,\quad V_1,\quad V_2\quad\ldots$$

ganze rationale Functionen, und

$$\nu,\ m,\ m_1,\ m_2\ \ldots;\quad \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots;\quad \beta,\ \beta_1,\ \beta_2\ \ldots$$

ganze positive Zahlen und aufserdem α, α_1, α_2 ... kleiner als ν sein sollen. *Man suche eine ganze rationale Function M vom $(n-1)$ten Grade, welche einer Gleichung von der Form:*

$$M^{\nu}U^{\alpha}U_1^{\alpha_1}U_2^{\alpha_2}\ldots V^{\beta}V_1^{\beta_1}V_2^{\beta_2}\ldots=1-NP$$

genügt, wo N ebenfalls eine ganze rationale Function sein soll und P das gegebene Polynom ist, nach dessen Potenzen die Entwicklung angestellt werden soll. Vermittelst der vorstehenden Gleichung sind die Werthe der Function M für die n Wurzeln der Gleichung $P=0$ gegeben, und da

diese Function den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigen soll, ist sie durch diese Werthe bestimmt, oder hat nur diejenige Unbestimmtheit, die aus der Wahl der Werthe hervorgeht, welche die gegebene irrationale Function für die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = 0$ annehmen kann. Umgekehrt genügt jede der so bestimmten Functionen M, deren Anzahl ν^n ist, einer Gleichung der angegebenen Art. Denn wenn die Function M auf die angegebene Art bestimmt ist, so verschwindet die ganze rationale Funetion:

$$1 - M^\nu U^\alpha U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots V^\beta V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \ldots$$

für jede der Wurzeln der Gleichung $P = 0$, und ist daher durch P theilbar, oder sie erhält die Form NP, wo N eine ganze rationale Function ist, wie verlangt wird. Bei dieser Bestimmung von M wird nur vorausgesetzt, dafs die ganzen Functionen U, U_1, ... V, V_1, ... mit P keinen gemeinschaftlichen Factor haben, welches die Bedingung ist, unter welcher allein die verlangte Entwicklung Statt haben kann.

Hat man die Function M gefunden, so kann man die gegebene irrationale Function auf die Form:

$$\frac{M U^m U_1^{m_1} U_2^{m_2} \ldots}{\sqrt[\nu]{(1-NP)}} = f(x)$$

bringen, in welcher sie sich nun ohne weitere Schwierigkeit auf die verlangte Art entwickeln läfst. Stellt man nämlich den Zähler des vorstehenden Bruches und die Function N wieder als Aggregate von Potenzen von P dar, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, so erhält $f(x)$ die Form:

$$f(x) = \frac{u_0 + u_1 P + u_2 P^2 + \cdots \text{etc.}}{\sqrt[\nu]{(1 - v_1 P - v_2 P^2 - \cdots \text{etc.})}},$$

wo u_0, u_1, ..., v_1, v_2, ... ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sind. Entwickelt man diesen Ausdruck nach den Potenzen von P, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von u_0, u_1, ... v_1, v_2, ..., welche man wieder als Aggregate von Potenzen von P, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, darzustellen hat, wodurch man schliefslich die verlangte Entwicklung erhält.

Wenn P einen Factor $(x - x_1)^\mu$ hat, so kann man mittelst der Gleichung, durch welche M bestimmt wird, für $x = x_1$ nicht blofs den Werth von M selber, sondern auch die Werthe seiner ersten $\mu - 1$ Differenzialquotienten bestimmen. Man kann daher immer die Partialbrüche angeben, in

welche sich der Bruch $\frac{M}{P}$ zerfällen läfst, und erhält dann durch Multiplication mit P die Function M selbst.

§. 5.

Anwendung auf irrationale Functionen im Allgemeinen.

Man kann durch die im Vorigen angewandte Methode auch allgemein jede *algebraische* Function von x in eine nach den Potenzen eines Polynoms P fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind.

Es sei ζ durch eine algebraische Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ gegeben, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind. Man soll ζ in eine Reihe

$$\alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \text{etc.} = \zeta$$

entwickeln, in welcher α, α_1, etc. ganze Functionen von x vom $(n-1)$ten Grade sind, und welche so beschaffen ist, dafs sie immer gleichzeitig für alle n Werthe von x gültig ist, für welche P einen gegebenen Werth erhält. Wenn P verschwindet, welches geschieht, wenn man der Gröfse x die Werthe

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

giebt, so wird ζ respective eine Wurzel der Gleichungen

$$\varphi(x_1, \zeta) = 0, \quad \varphi(x_2, \zeta) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta) = 0.$$

Es steht ganz in unserm Belieben zu bestimmen, welcher Wurzel ζ jedesmal gleich werden soll. Nennt man $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *beliebige* Wurzeln dieser verschiedenen Gleichungen, so dafs ζ_i eine beliebige Wurzel der Gleichung $\varphi(x_i, \zeta) = 0$ ist, so kann die gesuchte Entwicklung von ζ so bestimmt werden, dafs sie die Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ erhält, wenn x die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, wobei wieder, wenn die Gleichung $\varphi = 0$ in Bezug auf ζ vom νten Grade ist, ν^n Combinationen Statt finden können, welche verschiedene Entwicklungen geben, die immer anderen Werthen der algebraischen Function entsprechen. Die hier zu findende Entwicklung wird für die der Gröfse x_1 benachbarten Werthe von x die der Gröfse ζ_1 benachbarten Werthe von ζ, für die der Gröfse x_2 benachbarten Werthe von x die der Gröfse ζ_2 benachbarten Werthe von ζ u. s. f. darstellen. Man kann dieselbe auf folgende Art erhalten.

Es sei α eine ganze rationale Function von x vom $(n-1)$ten Grade, welche, wenn x die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ annimmt, die Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$

erhält. Substituirt man in $\varphi(x, \zeta)$ für ζ die Function α, so wird die Function $\varphi(x, \alpha)$, die man erhält, immer durch P theilbar. Denn zufolge der gemachten Voraussetzungen verschwinden die Gröfsen:

$$\varphi(x_1, \zeta_1), \quad \varphi(x_2, \zeta_2), \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta_n)$$

und da α, wenn x die Werthe x_1, x_2, ... x_n annimmt, gleichzeitig die Werthe ζ_1, ζ_2, ... ζ_n erhält, so verschwindet auch $\varphi(x, \alpha)$ für alle diese Werthe von x, und ist daher durch:

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = P$$

theilbar. Man setze jetzt

$$\zeta = \alpha + z,$$

so verwandelt sich die Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ in eine andre von der Form:

$$AP + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \text{etc.} = 0,$$

in welcher A, A_1, A_2, etc. endliche ganze Functionen von x sind. Wenn man die beiden ganzen Functionen K und B_1 sucht, welche der Gleichung:

$$KA_1 - B_1 P = 1$$

genügen, so erhält diese Gleichung durch Multiplication mit K die Form:

$$BP + (1 + B_1 P) z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \text{etc.} = 0.$$

Durch Umkehrung erhält man hieraus:

$$z = C_1 P + C_2 P^2 + C_3 P^3 + \text{etc.},$$

wo C_1, C_2 etc. ganze rationale Functionen von B, B_1, B_2, etc. und daher auch ganze rationale Functionen von x sind, worunter ich immer nur solche Functionen verstehe, in denen x auf einen endlichen Grad steigt. Man kann eine solche Reihe leicht in eine andre

$$\zeta - \alpha = z = D_1 P + D_2 P^2 + D_3 P^3 + \text{etc.}$$

verwandeln, in welcher D_1, D_2 etc. von niedererem Grade als P sind. In sämmtlichen hier betrachteten ganzen Functionen und auch in den zuletzt erhaltenen D_1, D_2 etc. sind die constanten Coefficienten rationale Ausdrücke der in den Functionen P, $\varphi(x, \zeta)$ und α enthaltenen Constanten. Die Bestimmung der Function B_1 setzt voraus, dafs A_1 oder der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ für $\zeta = \alpha$ mit P keinen gemeinschaftlichen Factor habe, welche Bedingung darauf hinauskommt, dafs, wenn man in der Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ für x die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ setzt, für keinen dieser Werthe von x die Glei-

chungen $\varphi(x, \zeta) = 0$, zwei gleiche Wurzeln ζ erhalten. Hat P den Factor $(x - x_1)^\mu$ so mufs nicht blofs α für $x = x_1$ den Werth einer Wurzel ζ erhalten, sondern es müssen auch die ersten $\mu - 1$ Differentialquotienten von α den diesem Werthe entsprechenden Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{dx}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \cdots \frac{d^{\mu-1}\zeta}{dx^{\mu-1}}$ gleich werden, wodurch α in allen Fällen bestimmt wird.

§. 6.

Anwendung auf logarithmische Functionen, exponentielle Functionen und Potenzen von beliebigem Exponenten.

Die hier gebrauchte Methode bleibt anwendbar, wenn die als endliche ganze Functionen von x eingeführten Ausdrücke solche unendliche Reihen sind, welche in der angegebenen Art nach ganzen positiven Potenzen von P fortschreiten und ganze rationale Functionen von x zu Coefficienten haben. So kann die hier für die Entwicklung einer algebraischen Function gegebene Methode auch angewandt werden, wenn die zwischen x und ζ gegebene Gleichung die Form

$$\varphi + \varphi_1 P + \varphi_2 P^2 + \text{ etc. in inf.} = 0$$

hat, wo φ, φ_1 etc. ganze rationale Functionen von x und ζ sind. Auch für diesen Fall werden die Constanten, welche in den gesuchten Entwicklungscoefficienten $(n-1)$ten Grades enthalten sind, durch die Constanten des ersten Entwicklungscoefficienten α rational ausgedrückt werden. Dagegen hört im Allgemeinen die Anwendbarkeit der im vorigen §. für die Entwicklung algebraischer Functionen gegebenen Methode auf, wenn es sich um die Entwicklung von *transcendenten* Functionen handelt. Man wird aber in vielen Fällen durch ein andres recurrirendes Verfahren aus dem ersten Gliede der Entwicklung alle Polynome nach einander durch algebraische Operationen ableiten können, so dafs auch in diesen wieder die Constanten rationale Functionen der in dem ersten enthaltenen werden.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, will ich die Aufgabe stellen, den *Logarithmus* eines gegebenen endlichen oder unendlichen Ausdrucks

$$a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{ etc.}$$

in welchem a, a_1, etc. Polynome niedereren Grades als P sind in eine ähnliche Reihe zu entwickeln. Es sei diese Reihe

$$\alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3 + \text{etc.} = \log(a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{etc.}),$$

so erhält man durch Differentiation:

$$\begin{aligned}(1.)\qquad & a'+a_1'P+a_2'P^2+a_3'P^3+\text{etc.}\\ & +P'(a_1+2a_2P+3a_3P^2+\text{etc.})\\ & =\{a+a_1P+a_2P^2+a_3P^3+\text{etc.}\}\\ & \times\begin{Bmatrix}\alpha'+\alpha_1'P+\alpha_2'P^2+\alpha_3'P^3+\text{etc.}\\ +P'(\alpha_1+2\alpha_2P+3\alpha_3P^2+\text{etc.})\end{Bmatrix},\end{aligned}$$

wo durch den obern Accent der nach x genommene Differentialquotient bezeichnet wird. Es sei

$$(2.)\qquad a_iP'=b_i+c_iP;\quad \alpha_iP'=\beta_i+\gamma_iP,$$

wo b_i, β_i die Reste der Division von a_iP', α_iP', durch P und c_i, γ_i die respectiven Quotienten bedeuten; es sei ferner

$$(3.)\qquad a_i'+ic_i+(i+1)b_{i+1}=e_i;\quad \alpha_i'+i\gamma_i+(i+1)\beta_{i+1}=\varepsilon_i.$$

Da die Functionen a_i gegeben sind, so sind auch die Functionen e_i gegebene Polynome vom $(n-1)$ten Grade. Durch Substitution der Gleichungen (2.) und (3.) verwandelt sich die Gleichung (1.) in die folgende:

$$\begin{aligned}(4.)\qquad & e+e_1P+e_2P^2+e_3P^3+\text{etc.}\\ & =(a+a_1P+a_2P^2+a_3P^3+\text{etc.})(\varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\varepsilon_3P^3+\text{etc.}).\end{aligned}$$

Setzt man

$$(5.)\qquad a\varepsilon_i+a_1\varepsilon_{i-1}+a_2\varepsilon_{i-2}+\cdots+a_i\varepsilon=\zeta_i+\eta_iP,$$

wo ζ_i und η_i ganze Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade sind, so giebt die Gleichung (4.) zwischen diesen unbekannten Functionen die Relation

$$(6.)\qquad e_i=\eta_{i-1}+\zeta_i.$$

Ich will jetzt annehmen, dafs die Entwicklungscoefficienten α, α_1, ... α_i bereits bekannt sind. Man kennt dann auch vermöge (2.), (3.) die Functionen ε, ε_1, ... ε_{i-1} und vermöge (5.) die Function η_{i-1}. Es ist daher durch die vorstehende Gleichung (6.) auch ζ_i gegeben; vermöge (2.) ist auch γ_i gegeben. Setzt man daher:

$$(7.)\qquad a(\alpha_i'+i\gamma_i)+a_1\varepsilon_{i-1}+a_2\varepsilon_{i-2}+\cdots+a_i\varepsilon-\zeta_i=\vartheta_i,$$

so ist auch ϑ_i gegeben. Die Gleichungen (3.), (5.) und (7.) geben

$$(8.)\qquad (i+1)a\beta_{i+1}+\vartheta_i=\eta_iP$$

oder, wenn man den Werth

$$\beta_{i+1}=\alpha_{i+1}P'-\gamma_{i+1}P$$

substituirt,

$$(9.) \quad \{(i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i\}P-(i+1)aP'.\alpha_{i+1} = \vartheta_i.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$(10.) \quad aP' = Q+f.P, \quad (i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i-(i+1)f.\alpha_{i+1} = k_{i+1},$$

wo Q den Rest der Division von aP' durch P, f den Quotienten dieser Division bedeutet, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$(11.) \quad k_{i+1}.P-(i+1)\alpha_{i+1}.Q = \vartheta_i.$$

In dieser Gleichung sind die ganzen Functionen P, Q, ϑ_i gegeben, die ganzen Functionen k_{i+1} und α_{i+1} unbekannt, von denen die letztere der auf die gegebenen zunächst folgende Entwicklungscoefficient ist. Um denselben aus der Gleichung (11.) zu bestimmen, sucht man ein für allemal nach den bekannten Vorschriften die beiden Functionen K und L vom $(n-1)$ten Grade, für welche

$$KP-LQ = 1$$

ist. Nach gleichfalls bekannten Regeln wird dann $(i+1)\alpha_{i+1}$ der Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch P.

Auf diese Weise kann man aus α nach und nach alle folgenden Coefficienten α_1, α_2, etc. finden.

Als zweites Beispiel soll die Entwicklung einer Function dienen, deren Logarithmus gegeben ist. Sind a, a_1, etc. gegebene ganze Functionen $(n-1)$ten Grades, und setzt man

$$e^{a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.}} = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

wo α, α_1, etc. wieder ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sein sollen, so kann man aus α die übrigen Coefficienten α_1, α_2, etc. finden. Man kann nämlich allgemein, wenn α, α_1, ... α_i gegeben sind, den nächst höheren Coefficienten α_{i+1} folgendermafsen bestimmen.

Bedient man sich der Bezeichungen (2.) und (3.), so hat man die Gleichung

$$(e_0+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.}) = \varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}$$

Kennt man α, α_1, ... α_i und also auch ε, ε_1, ... ε_{i-1}, so giebt diese Gleichung ε_i und daher wegen (3.) auch β_{i+1}, wodurch man mittelst (2.) auch α_{i+1} erhalten kann. Kennt man nämlich die beiden Functionen M und N vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, für welche

$$MP'-NP = 1,$$

so wird α_{i+1} der Rest der Division von $M\beta_{i+1}$ durch P.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf die Entwicklung ***einer beliebigen Potenz*** anwenden, wobei ich der Kürze wegen wieder von den obigen Bezeichnungen Gebrauch machen will. Für ***irgend einen*** Exponenten k sei:

$$(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})^k = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

so erhält man:

$$k(e+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.})$$
$$= (a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})(\varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}).$$

Kennt man α, α_1, ... α_i, so giebt diese Gleichung den Werth von ζ_i, woraus man mittelst (7.) den Werth von ϑ_i und dann wieder, wie im ersten Beispiel mittelst der Function L den Werth von $(i+1)\alpha_{i+1}$ als Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch P findet.

7.

Anwendung auf den Fall einer durch eine Quadratur definirten Function.

Die im Vorstehenden angewandte Methode beruht auf der Benutzung der Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die zu entwickelnde Function Genüge leistet. Dieselbe Methode kann in allen Fällen angewandt werden, in welchen man, bei den gewöhnlichen nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihen durch eine Differentialgleichung, welcher sie genügen, lineäre Relationen zwischen ihren Coefficienten erhält. Betrachtet man den einfachsten Fall, in welchem eine Reihe von der gegebenen Art zu integriren ist, und das Integral wieder auf dieselbe Form gebracht werden soll, so kann man jeden Term derselben auf den unmittelbar vorhergehenden zurückführen, so dafs man, wenn der erste Term gegeben ist, nach und nach alle übrigen finden kann. Der erste Term des gesuchten Integrals mufs aber durch andere Betrachtungen gefunden werden.

Es sei nämlich:

$$\int f(x)\,dx = \int(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})\,dx = A+A_1P+A_2P^2+\text{etc.}$$

Sind wieder x_1, x_2, ... x_n die Wurzeln der Gleichung $P=0$ und ist x_0 die untere Gränze, von welcher an das Integral genommen werden soll, so ist A als eine Function des $(n-1)$ten Grades zu bestimmen, welche für $x = x_1$, x_2, ... x_n respective die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \ldots \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

erhält. Es sei B_i der Rest der Division von A_iP' durch P und C_i der

Quotient dieser Division, so dafs

$$A_i P' = B_i + C_i P.$$

Man hat dann

$$a_i = iC_i + A_i' + (i+1)B_{i+1}.$$

Kennt man daher A_i und den Quotienten C_i der Division von $A_i P'$ durch P, so ist durch die vorstehende Formel auch B_{i+1} gegeben. Man hat dann auf die bekannte Art zwei ganze Functionen A_{i+1} und C_{i+1}, respective vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, von der Beschaffenheit zu suchen, dafs

$$A_{i+1}P' - C_{i+1}P = B_{i+1}.$$

Man findet diese Functionen mittelst der beiden Hülfsfunctionen M und N vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$MP' - NP = 1$$

genügen, als die Reste der Division von MB_{i+1} durch P und von NB_{i+1} durch P'. Es werden daher, wenn man A_i und C_i kennt, die Functionen A_{i+1} und C_{i+1} respective die Reste der Division

$$\text{von } \frac{1}{i+1} M(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P \text{ und}$$

$$\text{von } \frac{1}{i+1} N(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P'.$$

Auf diese Weise kann man aus A nach und nach alle folgenden Coefficienten A_1, A_2, etc. finden. *)

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dafs, wenn man das Product zweier den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigenden Functionen F und G durch eine Function $n$ten Grades

$$P = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

zu dividiren hat, es vortheilhaft sein kann, dem einen Factor die Form

$$f(p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}) + f_1(p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) + \cdots + f_{n-2}(p_{n-1} + p_n x) + f_{n-1} p_n = F$$

zu geben, in welcher f, f_1, ... f_{n-1} Constanten bedeuten. Man kann dann nämlich den Rest und den Quotienten der Division unmittelbar hinschreiben. Um die Function F auf diese Form zu bringen, bedarf es nur der leichten Auflösung solcher lineärer Gleichungen, von welcher jede folgende eine Unbekannte weniger enthält. Wenn für mehrere ähnliche Operationen, wie im Vorhergehenden, der eine Factor derselbe bleibt, wird der erreichte Vortheil noch wesentlich vermehrt. Es sei

$$P_m = p_m + p_{m+1} x + \cdots + p_n x^{n-m},$$
$$P^{(m)} = p + p_1 x + \cdots p_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$P = P^{(m)} + x^m P_m$$

und

$$F = fP_1 + f_1 P_2 + \cdots f_{n-1} P_n.$$

8.

Modification für den Fall, wo die ganze Function P, nach deren Potenzen entwickelt wird, lineäre Factoren in höherer als der ersten Potenz enthält.

Das hier gebrauchte Verfahren mufs für den Fall, dafs P und P' einen gemeinschaftlichen Factor haben, eine wesentliche Modification erleiden.

Es sei P durch die Factoren $x-x_1$, $x-x_2$, etc. respective μ_1, μ_2, etc. Mal theilbar, so wird

$$F = (x-x_1)^{\mu_1-1}(x-x_2)^{\mu_2-1}, \ldots$$

der gemeinschaftliche Factor von P und P', und setzt man $P = F.Q$, so wird Q durch $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, etc., aber durch jeden dieser lineären Factoren von F nur *einmal* theilbar.

Aus der Gleichung

$$A_i P' = B_i + C_i P,$$

folgt, dafs auch alle Gröfsen B_i diesen Factor F haben. Setzt man daher:

$$P = F.Q, \quad P' = F.Q_1, \quad B_i = F.D_i,$$

so hat man

$$A_i Q_1 = D_i + C_i Q.$$

Ist f der Grad von F, so werden Q und Q_1 vom $(n-f)$ten und $(n-f-1)$ten Grade; es werden daher A_i und C_i als Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade nicht mehr mittelst der vorstehenden Gleichung durch Q, Q_1 und D_i bestimmt, sondern, wenn (A_i) und (C_i) in der vorstehenden Gleichung die Functionen vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade bedeuten, welche dieser Gleichung genügen, so kann man zu (A_i) und (C_i) respective die Ausdrücke $R_i Q$ und $R_i Q_1$, wo R_i *eine beliebige Function* vom $(f-1)$ten Grade

---

Ist der andre Factor

$$G = g + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{n-1} x^{n-1},$$

so setze man in ähnlicher Weise

$$G_m = g_m + g_{m+1} x + \cdots + g_{n-1} x^{n-m-1},$$
$$G^{(m)} = g + g_1 x + \cdots + g_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$G^{(m)} + x^m G_m = G.$$

Setzt man

$$\frac{FG}{P} = Q + \frac{R}{P},$$

so hat man den Quotienten der Division

$$Q = f G_1 + f_1 G_2 + \cdots + f_{n-2} G_{n-1}$$

und den Rest

$$R = f(G' P_1 - G_1 P') + f_1(G'' P_2 - G_2 P'') + \cdots f_{n-2}(G^{(n-1)} P_{n-1} - G'_{n-1} P^{(n-1)}) + f_{n-1} P_n G,$$

wie sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln ergiebt.

ist, hinzufügen, und

$$A_i = (A_i) + R_i Q, \qquad C_i = (C_i) + R_i Q_1$$

setzen. Nach diesen vorausgeschickten Bemerkungen will ich zeigen, wie man in dem hier betrachteten Falle aus der Gröfse A_i die folgende A_{i+1} finden kann.

Die oben gegebene Gleichung

$$a_i = iC_i + A_i' + (i+1)B_{i+1}$$

zeigt, dafs die bereits gefundene Function A_i so beschaffen sein mufs, dafs der Ausdruck $a_i - iC_i - A_i'$ durch F theilbar wird, weil alle Functionen B_i durch F theilbar sind. Setzt man in der vorstehenden Gleichung $B_{i+1} = FD_{i+1}$, so erhält man

$$(i+1)D_{i+1} = \frac{1}{F}\{a_i - iC_i - A_i'\}.$$

Aus D_{i+1}, Q und Q_1 erhält man die Functionen (A_{i+1}) und (C_{i+1}) vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$(A_{i+1})Q_1 = D_{i+1} + (C_{i+1})Q$$

genügen, und aus diesen:

$$A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ; \qquad C_{i+1} = (C_{i+1}) + RQ_1,$$

wo R eine noch zu bestimmende Function des $(f-1)$ten Grades ist. Die Bestimmung von R erhält man daraus, dafs der Ausdruck

$$a_{i+1} - (i+1)C_{i+1} - A_{i+1}'$$

durch F theilbar sein mufs. Setzt man

$$a_{i+1} - (i+1)(C_{i+1}) - (A_{i+1})' = b_{i+1}, \qquad Q' + (i+1)Q_1 = Q_i,$$

so wird der vorstehende Ausdruck, wenn $\frac{dR}{dx} = R'$,

$$H = b_{i+1} - Q_i R - QR'.$$

Es kommt daher darauf an, *eine Function R vom $(f-1)$ten Grade so zu bestimmen, dafs der Ausdruck H durch eine gegebene Function vom f^{ten} Grade*

$$F = (x - x_1)^{\mu_1 - 1}(x - x_2)^{\mu_2 - 1} \ldots$$

theilbar wird, deren lineäre Factoren die Function Q einmal und nicht öfter theilen.

Soll der Ausdruck H durch $(x-x_1)^{\mu_1-1}$ theilbar sein, so mufs derselbe und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$ verschwinden. Aber in jedem Differentialquotienten von H ist der höchste von R in Q multiplicirt, welches für $x = x_1$ verschwindet, so dafs für $x = x_1$ in dem $(\mu_1 - 2)$ten Differentialquotienten von H die Differentialquotienten von R ebenfalls nur bis zum $(\mu_1 - 2)$ten steigen. Man erhält daher, indem man H und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten $= 0$ setzt, nachdem man darin

den Werth $x = x_1$ substituirt hat, $\mu_1 - 1$ Gleichungen, aus denen man successive die Werthe findet, welche R und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$ annehmen. Umgekehrt wird H durch $(x - x_1)^{\mu_1 - 1}$ theilbar, wenn man die Werthe von R und seinen $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten auf die angegebene Art bestimmt hat. Ebenso erhält man aus der Bestimmung, dafs H auch durch $(x - x_2)^{\mu_2 - 1}$ theilbar sein soll, die Bestimmung der Werthe, welche R und seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$ annehmen, und ähnliches in Bezug auf jeden der lineären Factoren, durch deren höhere Potenzen P theilbar ist, und deren um 1 niedrigere Potenzen die Factoren von F bilden.

Kennt man auf diese Weise sowohl die Werthe, welche R selbst für $x = x_1$, $x = x_2$, etc. annimmt, als auch die Werthe, welche seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$, seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$, u. s. f. erhalten, so kennt man auch die Zähler der Partialbrüche, in welche sich der Bruch

$$\frac{R}{F} = \frac{R}{(x - x_1)^{\mu_1 - 1}(x - x_2)^{\mu_2 - 1} \ldots},$$

nach den gewöhnlichen Regeln zerfällen läfst, und erhält durch Multiplication mit F die gesuchte Function R selber. Hat man R gefunden, so ist der gesuchte Coefficient $A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ$ vollkommen bestimmt. Man kann daher auch in dem Falle, dafs das Polynom P gleiche Factoren hat, jeden Coefficienten der gesuchten Entwicklung des Integrals aus dem unmittelbar vorhergehenden ableiten, und so aus dem ersten A nach und nach die übrigen finden. Die Bestimmung von A ergiebt sich aber daraus, dafs A für $x = x_1, x_2$, etc. die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \text{etc.}$$

erhält, und dafs von der Function

$$A - \int a\,dx$$

die $\mu_1 - 1$ ersten Differentialqnotienten für $x = x_1$, die $\mu_2 - 1$ ersten für $x = x_2$, etc. verschwinden.

Auf ganz ähnliche Art ist das in den im §. 6. behandelten Beispielen angewandte Verfahren, um aus dem ersten Entwicklungscoefficienten die folgenden abzuleiten, für den Fall, wenn P mehrere gleiche Factoren hat, zu modificiren.

(Berlin im Juli 1847.)

2.

Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*.)

Auf einen Ausdruck f, welcher sowohl von den Variablen $x, x_1 \dots x_n$ als auch von den Variablen $y, y_1 \dots y_n$ eine lineare homogene Funktion ist, und den man kurz eine zweifach lineare homogene Funktion nennen kann, läfst sich eine ähnliche Transformation anwenden, wie diejenige, vermittelst welcher man bekanntlich eine von $n+1$ Variablen $x, x_1 \dots x_n$ abhängige quadratische Form nur auf *eine* Weise als Quadratsumme $Az^2+A_1z_1^2+\cdots+A_mz_m^2+\cdots+A_nz_n^2$ so darstellt, dafs (für jedes m von $m=0$ bis $m=n$) z_m eine nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \dots x_n$ enthaltende lineare homogene Funktion ist. Die in Rede stehende Transformation besteht in Folgendem:

1. Es seien $u, u_1 \dots u_n$ lineare homogene Funktionen von $x, x_1 \dots x_n$, nämlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = \alpha_{0,0}x+\alpha_{0,1}x_1+\cdots+\alpha_{0,n}x_n \\ u_1 = \alpha_{1,0}x+\alpha_{1,1}x_1+\cdots+\alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ u_n = \alpha_{n,0}x+\alpha_{n,1}x_1+\cdots+\alpha_{n,n}x_n \end{cases}$$

Bildet man aus denselben Coefficienten, indem man ihre Horizontalreihen mit ihren Vertikalreihen vertauscht, $n+1$ andere lineare homogene Funktionen $v, v_1 \dots v_n$ der Variablen $y, y_1 \dots y_n$:

$$(2.)\quad \begin{cases} v = \alpha_{0,0}y+\alpha_{1,0}y_1+\cdots+\alpha_{n,0}y_n \\ v_1 = \alpha_{0,1}y+\alpha_{1,1}y_1+\cdots+\alpha_{n,1}y_n \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{0,n}y+\alpha_{1,n}y_1+\cdots+\alpha_{n,n}y_n \end{cases}$$

sodafs $u, u_1 \dots u_n$ und $v, v_1 \dots v_n$ zwei solche Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \dots x_n$ und $y, y_1 \dots y_n$ sind, welche man kurz zwei *conjugirte* Systeme nennt, alsdann hat man, wie unmittelbar erhellt, die

identische Gleichung

$$(3.) \quad yu + y_1u_1 + \cdots + y_nu_n = xv + x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

Umgekehrt ist die Gleichung (3.) die für zwei *conjugirte* Systeme von Variablen definirende Gleichung. Weifs man nämlich, dafs $u, u_1 \ldots u_n$ und $v, v_1 \ldots v_n$ zwei Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \ldots x_n$ und von $y, y_1 \ldots y_n$ sind, so genügt die Gleichung (3.), um zu beweisen, dafs beide Systeme conjugirt zu einander sind. Denn man substituire die Werthe von $u, u_1 \ldots u_n$ aus (1.) in (3.), so ergeben sich die Gleichungen (2.).

Definirt man nun f durch die Doppelgleichung

$$(4.) \quad f = yu + y_1u_1 + \cdots + y_nu_n = xv + x_1v_1 + \cdots + x_nv_n,$$

so ist f der allgemeinste sowohl in Bezug auf $x, x_1 \ldots x_n$ als auf $y, y_1 \ldots y_n$ lineare und homogene Ausdruck.

2. Es sei

$$(5.) \quad \begin{cases} u_1' = u_1 - \frac{a_{1,0}}{a_{0,0}}u & v_1' = v_1 - \frac{a_{0,1}}{a_{0,0}}v \\ u_2' = u_2 - \frac{a_{2,0}}{a_{0,0}}u & v_2' = v_2 - \frac{a_{0,2}}{a_{0,0}}v \\ \vdots & \vdots \\ u_n' = u_n - \frac{a_{n,0}}{a_{0,0}}u & v_n' = v_n - \frac{a_{0,n}}{a_{0,0}}v \end{cases}$$

sodafs in $u_1', u_2' \ldots u_n'$ die Variable x fehlt, in $v_1', v_2' \ldots v_n'$ die Variable y, dann verwandelt sich der Ausdruck (4.) in den folgenden:

$$f = u\left\{y + \frac{a_{1,0}}{a_{0,0}}y_1 + \frac{a_{2,0}}{a_{0,0}}y_2 + \cdots + \frac{a_{n,0}}{a_{0,0}}y_n\right\} + y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n'$$

$$= v\left\{x + \frac{a_{0,1}}{a_{0,0}}x_1 + \frac{a_{0,2}}{a_{0,0}}x_2 + \cdots + \frac{a_{0,n}}{a_{0,0}}x_n\right\} + x_1v_1' + x_2v_2' + \cdots + x_nv_n'$$

oder, was dasselbe ist, es wird

$$f = \frac{uv}{a_{0,0}} + f_1,$$

wo

$$f_1 = y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' = x_1v_1' + x_2v_2' + \cdots + x_nv_n'.$$

Diese Doppelgleichung zeigt, zufolge der früheren Erörterung, dafs die linearen homogenen Funktionen $u_1', u_2' \ldots u_n'$ von $x_1, x_2 \ldots x_n$ und $v_1', v_2' \ldots v_n'$ von $y_1, y_2 \ldots y_n$ wiederum zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten durch a' mit zwei unteren Indices bezeichnet werden mögen.

3. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man nach m maliger Transformation

$$(6.)\quad f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}} + \frac{u_1' v_1'}{\alpha_{1,1}'} + \frac{u_2'' v_2''}{\alpha_{2,2}''} + \cdots + \frac{u_{m-1}^{(m-1)} v_{m-1}^{(m-1)}}{\alpha_{m-1,m-1}^{(m-1)}} + f_m,$$

$$f_m = y_m u_m^{(m)} + y_{m+1} u_{m+1}^{(m)} + \cdots + y_n u_n^{(m)} = x_m v_m^{(m)} + x_{m+1} v_{m+1}^{(m)} + \cdots + x_n v_n^{(m)},$$

wo die linearen homogenen Funktionen $u_m^{(m)}, u_{m+1}^{(m)} \ldots u_n^{(m)}$ von $x_m, x_{m+1} \ldots x_n$ und $v_m^{(m)}, v_{m+1}^{(m)} \ldots v_n^{(m)}$ von $y_m, y_{m+1} \ldots y_n$ ebenfalls zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten resp. durch

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha_{m,m}^{(m)} & \alpha_{m,m+1}^{(m)} & \ldots & \alpha_{m,n}^{(m)} \\ \alpha_{m+1,m}^{(m)} & \alpha_{m+1,m+1}^{(m)} & \ldots & \alpha_{m+1,n}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \alpha_{m,m}^{(m)} & \alpha_{m+1,m}^{(m)} & \ldots & \alpha_{n,m}^{(m)} \\ \alpha_{m,m+1}^{(m)} & \alpha_{m+1,m+1}^{(m)} & \ldots & \alpha_{n,m+1}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

bezeichnet werden mögen.

Für $k = 1, 2 \ldots n$ ist u_k' eine lineare Verbindung von u und u_k.

Für $k = 2, 3 \ldots n$ ist u_k'' eine lineare Verbindung von u_k' und u_1', daher auch von u, u_1 und u_k u. s. w.

Allgemein: für $k = m, m+1 \ldots n$ ist $u_k^{(m)}$ eine lineare Verbindung von u, $u_1 \ldots u_{m-1}$ und u_k, und zwar eine solche, in welcher x, $x_1 \ldots x_{m-1}$ nicht vorkommen. Hierdurch allein wird $u_k^{(m)}$, abgesehen von einem constanten Faktor, bestimmt, und zwar als die Determinante des Systems

$$(8.)\quad \begin{cases} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} & u \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} & u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1} & u_{m-1} \\ \alpha_{k,0} & \alpha_{k,1} & \ldots & \alpha_{k,m-1} & u_k . \end{cases}$$

Aehnliches gilt für die Bestimmung von $v_k^{(m)}$.

4. Die übrig bleibende Ermittlung des constanten Faktors geschieht einfach durch folgende Betrachtung:

Man setze gleichzeitig

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \ldots \quad u_{m-1} = 0,$$

so folgt hieraus, wie leicht zu sehen,

$$u_1' = 0, \quad u_2' = 0 \quad \ldots \quad u_{m-1}' = 0$$

und hieraus auf dieselbe Weise

$$u_2'' = 0 \quad \ldots \quad u_{m-1}'' = 0$$

u. s. w. bis man endlich zu der letzten Gleichung:

$$u_{m-1}^{(m-1)} = 0 \quad \text{gelangt.}$$

Ist nun k eine der Zahlen $m, m+1 \ldots n$, so folgt aus $u = 0$ in Folge der Gleichungen (5.):

$$u'_k = u_k,$$

ebenso folgt aus $u'_1 = 0$:

$$u''_k = u'_k$$

u. s. w. und endlich aus $u^{(m-1)}_{m-1} = 0$:

$$u^{(m)}_k = u^{(m-1)}_k.$$

Als schliefsliches Resultat erhält man also, dafs wenn gleichzeitig $u, u_1, \ldots u_{m-1}$ verschwinden,

$$u^{(m)}_k = u_k$$

wird (wo $k = m, m+1 \ldots n$ sein kann).

Hieraus geht hervor, dafs die Determinante des Systems (8.) durch den Coefficienten von u_k in derselben dividirt werden mufs, d. h. durch die aus

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1} \end{matrix}$$

gebildete Determinante, um $u^{(m)}_k$ zu geben.

Bezeichnet man mit ***Bezout*** die Determinante dadurch, dafs man ein positiv zu nehmendes Glied derselben in runde Klammern einschliefst, so erhält man nach Einsetzung der Ausdrücke (1.) von $u, u_1 \ldots u_{m-1}, u_k$:

$$(9.) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1})\, u^{(m)}_k \\ = (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m})\, x_m \\ \quad + (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m+1})\, x_{m+1} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,n})\, x_n \end{array} \right.$$

und hieraus endlich ergiebt sich für die Coefficienten (7.) die Gleichung:

$$(10.) \quad \alpha^{(m)}_{k,i} = \frac{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1}\, \alpha_{k,i})}{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{m-1,m-1})},$$

(wo sowohl i als k die Werthe $m, m+1, \ldots n$ haben können).

5. Die Gleichungen (6.), (9.), (10.), in deren erster man $m = n$ zu setzen hat, enthalten die Transformation, von der hier die Rede ist, und geben:

$$f = \frac{uv}{a_{0,0}} + \frac{a_{0,0} u'_1 v'_1}{(a_{0,0} a_{1,1})} + \frac{(a_{0,0} a_{1,1}) u''_2 v''_2}{(a_{0,0} a_{1,1} a_{2,2})} + \cdots + \frac{(a_{0,0} a_{1,1} \ldots a_{n-1,n-1}) u^{(n)}_n v^{(n)}_n}{(a_{0,0} a_{1,1} \ldots a_{n-1,n-1} a_{n,n})},$$

wo

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1})u_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{m,i})x_i$$

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1})v_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{i,m})y_i.$$

Man kann dies Resultat in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem. Es sei

$$f = \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n}\alpha_{k,i}\,x_i\,y_k$$

eine lineare homogene Funktion sowohl von $x, x_1 \dots x_n$ als von $y, y_1 \dots y_n$, so kann dieselbe nur auf *eine* Weise in der Form

$$f = AUV + A_1U_1V_1 + \dots + A_mU_mV_m + \dots + A_nU_nV_n$$

so dargestellt werden, dafs (für jedes m) U_m und V_m zwei resp. nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \dots x_n$ und $y_m, y_{m+1} \dots y_n$ enthaltende lineare Funktionen sind. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{UV}{p_0} + \frac{U_1V_1}{p_0p_1} + \dots + \frac{U_mV_m}{p_{m-1}p_m} + \dots + \frac{U_nV_n}{p_{n-1}p_n},$$

wo U_m und V_m die Determinanten der Systeme

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{m-1,0} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{m-1,1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{0,m} & \alpha_{1,m} & \dots & \alpha_{m-1,m} & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{matrix}$$

und p_m die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,m} \end{matrix}$$

bedeuten.

Läfst man hierin die Variablen $x, x_1 \dots x_n$ und $y, y_1 \dots y_n$ mit einander zusammenfallen und unterwirft zugleich die Coefficienten α der Bedingung, dafs sie ungeändert bleiben wenn man Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauscht, so erhält man das bekannte

Theorem. Eine quadratische Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_i z_j$$

(wo $c_{ij} = c_{ji}$ ist), läßt sich nur auf eine Weise in der Form der Quadratsumme

$$f = \Delta C_1^2 - \Delta C_2^2 - \cdots - \Delta C_n^2 - \cdots - \Delta C_n^2$$

zu verstehen, daß für jedes n C_n eine lineare homogene Funktion nur von den Variablen $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1$ ist. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{C_1^2}{p_1} - \frac{C_2^2}{p_2 p_1} - \cdots - \frac{C_n^2}{p_{n-1} p_n} - \cdots - \frac{C_n^2}{p_{n-1} p_n},$$

wo C_n die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & & & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n-1} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix}$$

und p_n die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{matrix}$$

bedeuten.

3.

Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*.)

1.

Man weifs, dafs jede reelle rationale ganze homogene Function 2ten Grades auf unendlich viel Arten als ein lineares Aggregat von Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen dargestellt werden kann. Wie verschieden aber auch diese Darstellungen sein mögen, ***so wird in allen die Anzahl der positiven, so wie die Anzahl der negativen Quadrate dieselbe bleiben.***

Man nennt in diesem Satze positive und negative Quadrate des Aggregates diejenigen, welche mit einem positiven oder negativen Coefficienten behaftet sind. Man kann jeden dieser Coefficienten, positiv genommen, in das Quadrat, in welches er multiplicirt ist, einbegreifen, indem man für αu^2 oder $-\alpha u^2$, wo α einen constanten Coefficienten und u eine reelle lineare homogene Function bedeutet, $(\sqrt{\alpha}.u)^2$ oder $-(\sqrt{\alpha}.u)^2$ schreibt, wodurch die lineare homogene Function, welche in's Quadrat erboben wird, nicht aufhört, reell zu sein. Es kann daher der Allgemeinheit unbeschadet angenommen werden, dafs alle Quadrate nur mit dem Coefficienten $+1$ oder -1 behaftet sind.

Unter dieser Annahme kann der obige Satz so ausgesprochen werden:

Fundamentalsatz.

Es seien $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ und $u_1, u_2, \ldots u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$ zwei Systeme reeller von einander unabhängiger *) linearer homogener Functionen, zwischen deren Quadraten die lineare Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

identisch Statt finde, so ist nothwendig

$$i = m, \qquad k = n.$$

*) d. h. zwei Systeme, deren jedes aus Functionen besteht, die von einander unabhängig sind.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus den folgenden elementaren Betrachtungen.

Wenn man, was immer verstattet ist, eine Anzahl von einander unabhängiger linearer homogener Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ an die Stelle einer gleichen Anzahl von Variablen $x_1, x_2, \ldots x_i$ in eine lineare homogene Function A einführt, so wird diese wieder eine lineare homogene Function der Grösen $B_1, B_2, \ldots B_i$ und der übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2}, etc.

$$A = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_i B_i + \mu_1 x_{i+1} + \mu_2 x_{i+2} + \text{etc.}$$

Wenn die sämmtlichen Coefficienten μ_1, μ_2 etc. verschwinden, wird A blofs durch die Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ bestimmt, und dann mufs es auch immer zugleich mit ihnen verschwinden. Wenn dagegen auch nur einer der Coefficienten μ_1, μ_2 etc. nicht verschwindet, ist A von den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ unabhängig, indem es für alle Werthe, die man diesen Functionen beilegt, seinerseits noch wieder jeden beliebigen Werth annehmen kann, und es braucht daher in diesem Falle A auch nicht zugleich mit den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ zu verschwinden. Hat man nun k von einander unabhängige lineare homogene Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ und ist $k > i$, so kann es niemals geschehen, dafs durch diese Einführung der Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ als Variablen an die Stelle der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_i$ in allen Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ zugleich alle übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2} etc. von selbst herausgehen. Denn sonst wären $A_1, A_2, \ldots A_k$ blofs Functionen von $B_1, B_2, \ldots B_i$, und niemals kann die Anzahl von einander unabhängiger Functionen, wie $A_1, A_2, \ldots A_k$ sein sollen, grösser als die Anzahl der Variablen sein, wie es hier der Fall wäre, da man vorausgesetzt hat, dafs $k > i$. Es werden also die k Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ nicht nothwendig zugleich mit den i Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden müssen. Hat man mehr als i lineare homogene Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$, von denen aber nur $B_1, B_2, \ldots B_i$ von einander unabhängig sind, während die übrigen $B_{i+1}, B_{i+2}, \ldots B_m$ durch sie bestimmt sind, so werden alle Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$ verschwinden, wenn $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden. Ist nun $m < k$, also gewifs $i < k$, so hat man das folgende Lemma:

Lemma.

Wenn eine Anzahl von einander unabhängiger homogener linearer Functionen die Anzahl anderer homogener linearer Functionen über-

trifft, so kann man immer bewirken, dafs diese letzteren verschwinden, ohne dafs zugleich auch die ersteren alle verschwinden.

Dieses *Lemma,* welches vielleicht nicht einmal eines Beweises bedurft hätte, führt sogleich zu dem aufgestellten Fundamentalsatz.

Man nehme nämlich an, dafs in der identischen Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

die Zahlen i und m verschieden sein könnten, und dafs $m < i$, so wäre auch $m + k < i + k$, und es könnten die $m + k$ Functionen

$$u_1, u_2, \ldots u_m, s_1, s_2, \ldots s_k$$

verschwinden, ohne dafs die $i + k$ von einander unabhängigen Functionen

$$r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$$

alle mit ihnen zugleich verschwinden. Man hätte dann die Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 = -v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2,$$

in der $r_1, r_2, \ldots r_i, v_1, v_2, \ldots v_n$ reelle Gröfsen sind, und $r_1, r_2, \ldots r_i$ nicht alle verschwinden, welches absurd ist. Ganz eben so beweist man, dafs auch n und k nicht von einander verschieden sein können, wozu man nur in der gegebnen identischen Gleichung alle Zeichen umzukehren und dieselben Betrachtungen zu wiederholen braucht.

Der vorstehende Beweis zeigt, dafs man die Bedingung, dafs $u_1, u_2, \ldots u_m$, $v_1, v_2, \ldots v_n$ von einander unabhängig seien, fortlassen, und dann den Satz etwas allgemeiner so aussprechen kann:

Wenn $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k; u_1, u_2, \ldots u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$ *reelle homogene lineare Functionen und*

$$r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$$

von einander unabhängig sind, so kann eine identische Gleichung

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$$

niemals bestehen, wenn $m < i$ *oder* $n < k$.

Der aufgestellte Satz zeigt, dafs die reellen homogenen Functionen zweiten Grades sich spezifisch von einander unterscheiden, je nach der Anzahl positiver und negativer Quadrate reeller linearer von einander unabhängiger Functionen, durch welche sie dargestellt werden können, indem diese Anzahl von der

Wahl der linearen Functionen, die man sehr verschiedenartig treffen kann, gänzlich unabhängig ist.

Die Aufgabe, reelle lineare Substitutionen anzugeben, durch welche ein Ausdruck

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_k^2$$

wieder dieselbe Form

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_i^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_k^2$$

erhält, kann auf die ähnliche Aufgabe zurückgeführt werden, in welcher die Quadrate der beiden Aggregate sämmtlich positiv sind. Hat man nämlich $i+k$ lineare Functionen von $r_1, r_2, \ldots r_i, v_1, v_2, \ldots v_k$, welche mit $u_1, u_2, \ldots u_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ bezeichnet werden sollen, von der Beschaffenheit, dafs die identische Gleichung Statt findet:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_i^2 + s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_k^2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_k^2,$$

welche mit der vorgelegten übereinkommt, so kann man mittelst der $i+k$ linearen Gleichungen, welche das eine System Variablen durch das andere bestimmen, jede $i+k$ der $2(i+k)$ Variablen linear durch die übrigen $i+k$ ausdrücken, und daher auch die Gröfsen $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ durch die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_i, v_1, v_2, \ldots v_k$.

2.

Aus dem Fundamentalsatz ergiebt sich sogleich der bekannte Satz:

dafs die Gleichung eines Kegelschnitts oder einer Fläche 2ten Grades immer eine Curve oder Fläche derselben Art darstellt, das Coordinatensystem mag ein rechtwinkliges oder ein beliebiges schiefwinkliges sein.

Werden nämlich für zwei verschiedene Coordinatensysteme, auf welche die gegebene Gleichung der Fläche bezogen wird, die auf die Richtung der Hauptachsen bezogenen Gleichungen

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dp + Eq + Fr + G = 0,$$
$$Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + Dp' + Eq' + Fr' + G = 0,$$

so werden die ersten Theile der beiden Gleichungen identisch, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt. Damit aber diese Identität Statt finden kann, mufs es nach dem Theorem unter den Coefficienten A, B, C eben so viel positive, negative und verschwindende geben, als unter

den Gröfsen A', B', C'. Die Art der Fläche hängt aber davon ab, wie viel von diesen Gröfsen positive, negative oder verschwindende sind, wodurch der Satz für die Flächen folgt, und ebenso auch für die Kegelschnitte erhellt.

Auf ähnliche Art und ebenso unmittelbar ergiebt sich aus dem Fundamentalsatz der bekannte Satz,

> dafs wenn eine Fläche zweiter Ordnung, durch eine auf ein System conjugirter Durchmesser bezogene Gleichung, $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$, gegeben ist, immer gleich viel von den Coefficienten A, B, C positiv und negativ werden, welches System conjugirter Durchmesser der Fläche man auch zu Coordinatenachsen genommen hat.

Wenn nämlich $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2=1$ Gleichungen derselben Fläche, auf verschiedene Systeme conjugirter Durchmesser bezogen, bedeuten, so müssen wieder die beiden Ausdrücke $Ap^2+Bq^2+Cr^2$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2$ identisch werden, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt, und daher unter den Coefficienten A, B, C und A', B', C' dieselbe Anzahl positiv und negativ sein.

Die allgemeinste Correlation zwischen räumlichen Figuren von der Beschaffenheit, dafs die entsprechenden Flächen immer denselben Grad haben, besteht darin, dafs man für die Coordinaten der Puncte der einen Figur Brüche setzt, die denselben Nenner haben, und deren Zähler, so wie der gemeinschaftliche Nenner, lineare Functionen der Coordinaten der Puncte der anderen Figur sind. Es seien die Gleichungen zweier sich zufolge solcher Correlatiou einander entsprechenden Flächen 2ten Grades, auf Systeme conjugirter Durchmesser bezogen,

$$\begin{aligned} Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2 &= 0,\\ A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2 &= 0, \end{aligned}$$

wo $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ und $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$ die Coordinaten der Puncte der beiden Flächen bedeuten. Es mufs dann die identische Gleichung

$$A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2 = Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2$$

dadurch erhalten werden können, dafs man für p, q, r, s reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen von x, y, z, w setzt, und daher unter den Coefficienten A, B, C, D und A', B', C', D' eine gleiche Anzahl positiv und negativ sein. Wenn drei dieser Coefficienten positiv und einer

negativ oder drei negativ und einer positiv sind, so können diese Gleichungen sowohl Ellipsoiden als elliptische (zweiflächige) Hyperboloiden darstellen; wenn dagegen von diesen Coefficienten zwei positiv und zwei negativ sind, nur das hyperbolische (einflächige) Hyperboloid. Man hat daher den Satz:

> Nach der allgemeinsten Correlation, bei welcher je zwei einander entsprechende Flächen denselben Grad haben, können einander Ellipsoide und elliptische Hyperboloide, aber hyperbolischen Hyperboloiden nur wieder hyperbolische Hyperboloide entsprechen.

(Von dieser sehr wahrscheinlich im Jahr 1847 geschriebenen Abhandlung ist der Schluſs, welcher für die weiteren Anwendungen des Fundamentalsatzes bestimmt war, nicht vorhanden. Ueber eine dieser Anwendungen findet man im Journal für Mathematik, Bd. LIII pag. 281 Nachricht.)

4.

Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie.

(Tirée des manuscrits inédits de *C. G. J. Jacobi* et communiquée par M. *E. Luther.*)*)

Le problème dont je vais traiter est le suivant:

Étant connues la longueur s d'un arc géodésique, la latitude B' de son origine et son angle azimuthal T'' à ce point, déterminer la latitude B'' de l'autre extrémité de l'arc, son angle azimuthal T''' à ce second point et la différence en longitude de ces deux extrémités.

En appliquant à ce problème les séries dans lesquelles j'ai développé les fonctions elliptiques on en trouve une nouvelle solution très simple, que voici.

L'excentricité du méridien terrestre étant désigné par e, on calculera d'abord la latitude réduite l' de l'origine de la ligne géodésique au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{(1-e^2)}\operatorname{tg} B'.$$

On imaginera ensuite un triangle sphérique rectangle $PO'O$ dont l'hypoténuse soit $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et l'un des angles aigus $PO'O = T''$. On sait que, si l'on mène du point P à un point quelconque O'' du côté OO' de ce triangle, prolongé au besoin, un arc de grand cercle PO'', on aura toujours PO'' et $PO'O$ respectivement égaux au complément de la latitude réduite d'un certain point de la ligne géodésique et à l'angle azimuthal de cette ligne au même point. Supposons que le point O'' soit l'autre extrémité de l'arc s, la marche que suivra notre solution, sera la suivante.

1. On déterminera la correction $\Delta \lg s$ à ajouter au logarithme de l'arc géodésique s pour avoir le logarithme de l'arc de grand cercle $O'O''$;
2. On calculera dans le triangle sphérique $PO'O''$, dont on connait deux côtés $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et $O'O''$ et l'angle compris $PO'O'' = \pi - T''$, le

---

*) Dieser Aufsatz sowie der darauf folgende sind bereits in den Astronomischen Nachrichten Bd. 41 pag. 210 und Bd. 42 pag. 338 abgedruckt worden.

troisième côté $PO'' = \frac{\pi}{2} - l''$, l'angle $PO''O' = T''$ et l'angle $O'PO''$, que je nommerai ω. On choisira pour ce calcul des formules propres à donner les valeurs de $\lg(l' - l'')$, $\lg(T'' - T'')$, $\lg\omega$ exactes dans les septièmes décimales;

3. On cherchera la correction $\Delta\omega$ à soustraire de ω pour avoir la différence en longitude que je nommerai λ;
4. On remontera de la différence des latitudes réduites $l' - l''$ à la différence des latitudes $B' - B''$.

Les calculs du No. 2 sont ceux qu'on employerait (avec des données différentes) dans l'hypothèse de la Terre sphérique. Ce sont les seuls calculs dans lesquels il faudrait pour quelques logarithmes employer des tables à 7 décimales. Tout le reste du calcul n'exige que l'emploi de tables à 5 décimales.

Je vais donner à présent les formules par lesquelles on calcule les corrections $\Delta\lg s$ et $\Delta\omega$, et dans lesquelles les logarithmes sont les logarithmes vulgaires.

1. Dans le triangle rectangle $PO'O$, dans lequel on connait

$$PO' = \frac{\pi}{2} - l', \qquad PO'O = T',$$

on calculera au moyen des formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{cotg} l' \cos T' \\ \cos l &= \cos l' \sin T' \\ \operatorname{tg} l &= \frac{\operatorname{tg} l'}{\cos\varphi' \sin T'}, \end{aligned}$$

dont la dernière donne une vérification des deux autres, les quantité

$$OO' = \varphi', \qquad PO = \frac{\pi}{2} - l,$$

et ensuite $\sin B$ au moyen de la valeur

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{(1-e^2)}}, \qquad \{\lg\sqrt{(1-e^2)} = 9{,}9985458\}$$

enfin

$$\lg q = \lg(a \sin^2 B) + b \sin^2 B + c \sin^4 B,$$

où

$$\lg a = 6{,}620290, \qquad \lg b = 7{,}16116, \qquad \lg c = 4{,}594.$$

2. En désignant par s l'arc mesuré divisé par le rayon de l'équateur restre et exprimé en secondes, on calculera

$$\lg\varphi^0 = \lg s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg\varphi = \lg O'O'' = \lg\varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}$$

où

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43$$

(i est exprimé en unités de la 7ième décimale).

C'est cette valeur de $\lg\varphi$ qu'il faudra connaitre pour effectuer le calcul du triangle sphérique $PO'O''$, dans lequel φ est le côté $O'O''$. On voit que cette valeur s'obtient en ajoutant une correction à $\lg s$. L'angle φ est donné ici en secondes.

3. La valeur de $\lg\Delta\omega$ se compose de quantités connues déjà par les calculs précédents. En effet nommant C et D les quantités déjà calculées,

$$C = fq\cos^2\varphi', \qquad D = gq\sin 2\varphi'.\varphi^0$$

on aura

$$\lg\Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Ayant trouvé par cette formule $\Delta\omega$ en secondes, on a la différence en longitude,

$$\lambda = \omega - \Delta\omega.$$

4. Connaissant par le calcul du triangle $PO'O''$ la différence des latitudes réduites $l' - l'' = PO'' - PO'$, on aura la différence des latitudes sur la Terre,

$$B' - B'' = l' - l'' + k\sin(l' - l'')\cos(l' + l'') + n\sin 2(l' - l'')\cos 2(l' + l'').$$

où

$$\lg k = 2{,}83926, \qquad \lg n = 9{,}7620.$$

Le problème dont je viens de donner une solution nouvelle a été dans ces derniers temps l'objet de soins particuliers de la part de M. *Gauſs*, qui en a traité dans différents mémoires et en a donné plusieurs solutions. Mon illustre ami, M. *Hansen*, a calculé par les formules précédentes l'exemple qui sert à M. *Gauſs* pour éclaircir la dernière de ses solutions (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, zweite Abhandlung, Göttingen 1847 p. 33). Je mettrai ici avec détail la partie de ce calcul qui se rapporte aux corrections dues à l'ellipticité du sphéroide terrestre.

Exemple.

$\lg s = 3{,}5349945 \qquad B' = 51^0\,48'\,1''9294 \qquad T' = 5^0\,42'\,21''7699$

$\lg \operatorname{tg} B' = 0{,}1040765 \quad \lg \cos T' = 9{,}9978428 \qquad \lg \sin T' = 8{,}9974946$

$l' = 51^0\,42'\,26''16 \qquad \varphi' = 38^0\,9'\,19''$

$\lg \cos \varphi' = 8{,}89562 \qquad \lg \sin 2\varphi' = 9{,}98748 \qquad \lg \cos 2\varphi' = 9{,}37$

$\lg \operatorname{tg} l = 1{,}20950 \qquad \lg \cos l = 8{,}78968$

$\lg \operatorname{tg} B = 1{,}21095 \qquad \lg \sin B = 9{,}99918$

$\lg (a \sin^2 B) = 6{,}61865$

$b \sin^2 B = 0{,}001444$

$c \sin^4 B = 4$

$\lg q = 6{,}62010$

$\lg s = 3{,}5349945$

$d = 0{,}0014542$

$-fq \cos^2 \varphi' = -0{,}0008958 = -C$

$\lg \varphi^0 = 3{,}5355529$

$gq \sin 2\varphi' . \varphi^0 = 0{,}00001171 = D$

$-hq^2 \sin^2 2\varphi' = -0{,}00000114$

$iq \cos 2\varphi' . \varphi^{0^2} = 3$

$\lg \varphi = \lg O'O'' = 3{,}5355635$

Le calcul du triangle $PO'O''$ donne:

$T' - T'' = 7'\ 0''5884 \qquad \omega = 8'\,59''4065$

$l' - l'' = 56'\,55''4716 \qquad l' + l'' = 102^0\,27'\,57''$

$\lg (\varphi \cos l) = 2{,}32524$

$7{,}52410$

$-\frac{1}{2}C = -0{,}000448$

$\frac{1}{2}D = 6$

$\lg \Delta\omega = 9{,}84890$

$l' - l'' = 56'\,55''4716$

$k \sin (l' - l'') \cos (l' + l'') = -2''4685$

$n \sin 2(l' - l'') \cos 2(l' + l'') = -174$

$B' - B'' = 56'\,52''9857$

$\Delta\omega = 0''7062$

$\lambda = \omega - \Delta\omega = 8'\,58''7003$

$T'' = T' - (T' - T'') = 5^0\,35'\,21''1815$

$B'' = B' - (B' - B'') = 50^0\,51'\ 8''9437.$

M. *Gauſs* trouve:

$\lambda = 8'\,58''7002$

$T'' = 5^0\,35'\,21''1815$

$B'' = 50^0\,51'\ 8''9444.$

* * *

Supposons qu'en partant des mêmes données B', T', s on ait calculé les valeurs de B'', T'', λ dans l'hypothèse de la Terre purement sphérique et nommons ces valeurs B''_0, T''_0, λ_0. Il sera curieux et utile de connaitre des formules approximatives simples qui puissent servir à estimer la grandeur des quantités

$$B'' - B''_0, \qquad T'' - T''_0, \qquad \lambda - \lambda_0$$

ou l'influence que l'ellipticité du sphéroide terrestre exerce sur la détermination de B'', T'', λ. Ces formules sont:

$$B'' - B''_0 = -\tfrac{1}{4} \sin 2B' . e^2$$

$$T'' - T''_0 = -\tfrac{1}{2} \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T' . e^2 s$$

$$\lambda - \lambda_0 = -\tfrac{1}{2} \frac{2\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'} \sin T' . e^2 s.$$

La dernière de ces quantités s'évanouit pour une latitude d'environ $54^0 44'$.

* * *

En finissant je réunirai les formules par lesquelles on exprime toutes les quantités relatives à une même ligne géodésique au moyen des fonctions elliptiques Θ et H, auxquelles on a joint les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K - u), \qquad H_1(u) = H(K - u).$$

Au lieu des deux constantes qui entrent dans la détermination d'une ligne géodésique, de l'excentricité e et de la latitude B du point où la ligne touche le parallèle, on introduit le module k des fonctions elliptiques (ou son complément k') et un argument constant a, au moyen des formules

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a, k')}, \qquad \cos B = k' \sin \operatorname{am}(a, k')$$

ou

$$e = \sqrt{k} \cdot \frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}, \qquad \sqrt{(1 - e^2)} = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)}$$

$$\sin B = \sqrt{k} \cdot \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \cos B = \sqrt{k'} \cdot \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)},$$

i étant $= \sqrt{-1}$. On aura encore pour la latitude réduite l du point où la ligne touche le parallèle

$$\cos l = \sin \operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}$$

$$\sin l = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} l = \sqrt{k} \cdot \frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}.$$

Mettant pour un point quelconque de la ligne géodésique

$$\varphi' = \operatorname{am}(u),$$

et supposant

$$N = \sqrt{\{H(u+ia).H(u-ia)\}},$$

il viendra

$$\sin T'' = \frac{H(ia)}{i\Theta(o)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N}, \quad \cos T'' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \operatorname{tg} T'' = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)}\cdot\frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \cos l' = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta_1(u)}, \quad \cos B' = \frac{\Theta(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Pour exprimer toutes les quantités relatives au triangle sphérique rectan. POO' par les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1, mettons

$$O'PO = \omega',$$

on aura

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}, \quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{iH_1(ia).H(u)}{H(ia).H_1(u)}.$$

Supposons qu'on eût construit le triangle POO', en prenant pour $\frac{\pi}{2} - P$ la vraie latitude B' au lieu de la latitude réduite l'. Nommant l_0, φ'_0, ω'_0 les valeurs que dans ce cas prendraient les quantités l, φ', ω', on aura

$$\cos l_0 = \frac{H(ia).\Theta(u)}{iH_1(ia).\Theta_1(u)}, \qquad \operatorname{tg}\varphi'_0 = \frac{\Theta(ia).H(u)}{\Theta_1(ia).H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega'_0 = \frac{i\Theta(ia)\,H_1(ia)}{\Theta_1(ia)\,H(ia)}\cdot\frac{H(u)\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)\,H_1(u)}.$$

Cette dernière formule peut être simplifiée en introduisant un module transfor.

Enfin, nommant λ' la longitude du point auquel répond la valeur $\varphi' = \operatorname{am}(u)$, cette longitude étant rapportée au méridien qui passe par le point où la ligne géodésique touche le parallèle, on aura, en supposant

$$\nu = \frac{d\lg\Theta_1(ia)}{da},$$

les formules remarquables

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos B' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\cos B' \cos(\lambda' - \nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

et de plus

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)H_1(u)}{H_1(ia)\Theta(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta(u)}.$$

Berlin, 1849 Nov. 7.

5.

C. G. J. Jacobi's Ableitung der in seinem Aufsatze: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie" enthaltenen Formeln.

(Mitgetheilt von Herrn *E. Luther.*)

In Vorstehendem habe ich einen Aufsatz *Jacobi*'s mitgetheilt, welcher eine neue Lösung einer Fundamental-Aufgabe der Geodäsie und neue geodätische Formeln enthält. Aus den mir von Herrn Professor *Lejeune-Dirichlet* gütigst anvertrauten Manuscripten *Jacobi*'s ist es mir gelungen des Verfassers Ableitung seiner Auflösung und seiner Formeln herzustellen. Dieselbe ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Die schon von den bedeutendsten Geometern und Astronomen behandelte Aufgabe, von welcher *Jacobi* eine neue Lösung gegeben hat, ist folgende:

„Wenn die Länge eines geodätischen Bogens s, die Breite B' seines Anfangspunktes und das Azimuth T' dieses Punktes gegeben sind, die Breite B'' und das Azimuth T'' seines Endpunktes, so wie den Längenunterschied λ beider Punkte zu finden."

Die von *Legendre* (Analyse des triangles, tracés sur la surface d'un sphéroïde, Mémoires de l'Institut, premier semestre de 1806) aufgestellten transcendenten Formeln, welche die Auflösung dieser Aufgabe enthalten, sind bekannt. Indem *Jacobi* in diese Formeln statt der elliptischen Integrale die elliptischen Functionen einführte und auf diese die in den „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" enthaltenen Reihen-Entwickelungen anwendete, gelangte er in nachfolgender Weise zu seiner Auflösung dieser Aufgabe.

Wenn man die Abplattung der Erde mit $1-\sqrt{1-ee}$ bezeichnet, so dafs also nach *Bessel*'s letzten Bestimmungen $\lg e = 8.9122052079$ ist, so erhält man aus der Breite B' die reducirte Breite l' durch die Formel:

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{1-ee}.\operatorname{tg} B'.$$

Stellt man sich nun einen sphärischen rechtwinkeligen Triangle POO' vor, dessen Hypotenuse $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ und in dem der spitze Winkel $PO'O = T'$ ist, so ist aus *Legendre*'s Untersuchungen bekannt, dafs, wenn man auf dem

gröfsten Kreis OO' einen zweiten Punkt O'' annimmt und durch denselben den gröfsten Kreis PO'' legt, das Complement dieses Bogens PO'' und der Winkel $PO''O$ respective als die reducirte Breite l'' eines andern Punktes der geodätischen Linie und als das Azimuth T'' dieser Linie in demselben Punkte angesehen werden können. Die Kenntnifs des Bogens $O'O''$ genügt daher, um durch Berechnung des sphärischen Triangels $PO'O''$ die Gröfsen l'' und T'' kennen zu lernen.

Die Gröfse $O'O''$ läfst sich aus dem gemessenen Bogen s der geodätischen Linie auf folgende Art bestimmen. Es sei $PO = \frac{\pi}{2} - l$ und $OO' = \varphi'$, so lassen sich l und φ' durch die Formeln

$$\cos l' \sin T'' = \cos l$$

und

$$\operatorname{cotg} l' \cos T'' = \operatorname{tg} \varphi'$$

berechnen. Setzt man nun $OO'' = \varphi''$, so ist der gesuchte Bogen

$$O'O'' = \varphi'' - \varphi',$$

welche Gröfse durch Auflösung der transcendenten Gleichung:

$$s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \,.\, \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 l \cos^2 \varphi}$$

(*Legendre* Exercices, tome I pag. 180) erhalten wird, die sich, wenn man

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tg} B \quad \text{und} \quad e \sin B = k$$

setzt, auf die Form

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \,.\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

bringen läfst, wo k eine bekannte Gröfse und immer kleiner als e ist. In diese Gleichung, welche auch

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \cdot \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sin^2 \varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

geschrieben werden kann, führe man

$$\frac{\pi}{2K} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = x,$$

wo K das ganze elliptische Integral der ersten Gattung bezeichnet, als Variabele

ein, und bezeichne

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'$$

und

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi''}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'',$$

so dafs also

$$\varphi' = \operatorname{am}\frac{2Kx'}{\pi} \quad \text{und} \quad \varphi'' = \operatorname{am}\frac{2Kx''}{\pi} \text{ ist.}$$

Dadurch erhält man:

$$\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}(x''-x) - k^2\frac{2K}{\pi}\int_{x'}^{x''}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.dx$$

oder, wenn man die Fund. pag. 133 §. 47 gegebene Formel anwendet,

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{2K}{\pi}\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}(x''-x') + 4\left\{\frac{q\sin 2x''}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x''}{1-q^4} + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad - 4\left\{\frac{q\sin 2x'}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x'}{1-q^4} + \cdots\right\} \end{cases}$$

wo E das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung bezeichnet. Die Function q wird durch die Gleichung (Fund. pag. 104 Formel 14)

$$\lg k = \lg 4\sqrt{q} - 4q + 6q^2 - \tfrac{16}{3}q^3 + \cdots$$

definirt, aus welcher man

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + 8q - 12q^2 + \tfrac{32}{3}q^3 - \cdots$$

und ferner

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{64}k^4 + \tfrac{2}{1024}k^6 + \cdots$$

erhält. Zur Berechnung des *Brigg*schen Logarithmus von q hat man demnach die Gleichung:

$$\lg \operatorname{vulg} q = \lg \operatorname{vulg}\frac{e^2\sin^2 B}{16} + \tfrac{1}{2}Ae^2\sin^2 B + \tfrac{1}{64}Ae^4\sin^4 B + \tfrac{2}{1024}Ae^6\sin^6 B,$$

wo A den Modul des *Brigg*schen Systems bezeichnet, oder

$$\lg \operatorname{vulg} q = \lg \operatorname{vulg}(a\sin^2 B) + b\sin^2 B + c\sin^4 B,$$

wenn

$$\lg a = 6{,}620290, \quad \lg b = 7{,}16116, \quad \lg c = 4{,}594 \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man in der Gleichung (1.) die dritten und höheren Potenzen von q und bezeichnet $x''-x'$ durch x und $\frac{1}{2}(x''+x')$ durch X,

so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}x + 8q\sin x\cos 2X + 8q^2\sin 2x\cos 4X$$

und, wenn man berücksichtigt, dafs für einen gemessenen Bogen x eine kleine Gröfse sein wird,

$$(2.)\qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 16q^2\cos 4X\right\}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 110 und 111:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \cdots\right\}$$
$$= 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 2q^{2p} + 4q^{4p} + 8q^{8p} + \cdots\}$$

und nach Fund. pag. 106 Formel 34:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + \cdots\},$$

wo p die ungeraden Zahlen und $\varphi(p)$ die Summe der Factoren von p bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^{2p} - q^{4p} - 5q^{8p} - \cdots\}$$
$$= 1 + 8q^2 - 8q^4 + 32q^6 - \cdots$$

und, wenn man nur die beiden *ersten* Glieder berücksichtigt, (in den 12 ersten Decimalstellen genau)

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8q^2.$$

Substituirt man diese Formel in die Gleichung (2.), so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\{1 + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 8q^2 + 16q^2\cos 4X\},$$

aus welcher mit derselben Annäherung folgt:

$$\lg\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 8q^2.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung

$$\lg\frac{2K}{\pi} = 4q - 4q^2$$

(Fund. pag. 105 Formel 16), so erhält man:

$$(3.)\qquad \lg\left(\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x - 4q + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 4q^2.$$

Da $\sin B = \frac{k}{e}$, so ist $\operatorname{tg}^2 B = \frac{k^2}{e^2-k^2}$, also $\operatorname{tg}^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2-k^2}$ und folglich $\sin^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2(1-k^2)}$. Mithin ist $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 l} = \frac{1-k^2}{1-e^2}$, woraus folgt:

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \lg \sqrt{1-k^2}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 104 Formel 15:

$$\lg \sqrt{1-k^2} = -8q - \tfrac{32}{3} q^3$$

also

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - 8q - \tfrac{32}{3} q^3.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (3.), indem man $\lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ durch ε bezeichnet, so erhält man:

$$\lg s = \lg x - \varepsilon + 4q + 8q \cos 2X - \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2$$

oder

$$(4.) \quad \lg x = \lg s + \varepsilon - 4q - 8q \cos 2X + \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2.$$

Nach Fund. pag. 102 Formel 24 ist:

$$\varphi' = \operatorname{am} \frac{2Kx'}{\pi} = x' + \frac{2q \sin 2x'}{1+q^2} + \frac{2q^2 \sin 4x'}{2(1+q^4)} + \cdots$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\varphi = x' + 2q \sin 2x' + q^2 \sin 4x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\varphi'' = x'' + 2q \sin 2x'' + q^2 \sin 4x''$$

und folglich:

$$\varphi'' - \varphi' = x'' - x' + 4q \sin(x''-x') \cos(x''+x') + 2q^2 \sin 2(x''-x') \cos 2(x''+x'),$$

oder mit der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\varphi'' - \varphi' = x + 4q \sin x \cos 2X + 2q^2 \sin 2x \cos 4X.$$

Vernachläfsigt man in dieser Gleichung $\frac{1}{10} q x^5$ und $\frac{8}{3} q^2 x^3$ (q ist im ungünstigsten Falle $< \frac{1}{1500}$ und $x < \frac{1}{60}$), so wird aus derselben:

$$\varphi'' - \varphi' = x\{1 + 4q \cos 2X - \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2 \cos 4X\}$$

und mit derselben Annäherung:

$$\lg(\varphi'' - \varphi') = \lg x + 4q \cos 2X - \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2.$$

Substituirt man nun in diese Gleichung die Gleichung (4.), so erhält man:

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-4q-4q\cos 2X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X$$

oder

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2 X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X.$$

Zur Berechnung von $\varphi''-\varphi'$ aus dieser Gleichung ist es zulässig statt x und X Näherungswerthe zu setzen. Bezeichnet man $\varphi''-\varphi'$ durch φ und $\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi')$ durch Φ, so kann man

$$\varphi \text{ statt } x$$

und $\Phi-2q\sin 2\Phi$ statt X setzen.

Diese letzte Substitution erhält man aus den Gleichungen:

$$\varphi' = x'+2q\sin 2x'$$
$$\varphi'' = x''+2q\sin 2x'',$$

welche durch Umkehrung

$$x' = \varphi'-2q\sin 2\varphi'$$
$$x'' = \varphi''-2q\sin 2\varphi'',$$

also $X = \Phi-2q\sin 2\Phi\cos\varphi$ oder näherungsweise

$$X = \Phi-2q\sin 2\Phi$$

ergeben. Alsdann ist:

$$\cos X = \cos\Phi+2q\sin 2\Phi\sin\Phi$$
$$= \cos\Phi(1+4q\sin^2\Phi)$$

also

$$\cos^2 X = \cos^2\Phi(1+8q\sin^2\Phi)$$
$$= \cos^2\Phi+2q\sin^2 2\Phi$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\Phi+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi-16q^2\sin^2 2\Phi.$$

Um aus dieser Gleichung φ zu finden, berechnet man zuerst einen Näherungswerth φ^0 von φ durch die Gleichung:

$$\lg\varphi^0 = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\varphi'$$

und setzt $\varphi'+\frac{1}{2}\varphi^0$ statt Φ, und φ^0 statt φ. Alsdann wird

$$-8q\cos^2\Phi = -8q\cos^2\varphi'+2q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0,$$
$$+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi = +\tfrac{2}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$
$$-16q^2\sin^2 2\Phi = -16q^2\sin^2 2\varphi'$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg\varphi^0+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0-16q^2\sin^2 2\varphi'+\tfrac{2}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2}.$$

Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von φ hat man demnach die Gleichungen:

$$\lg \text{vulg}\, \varphi^0 = \lg \text{vulg}\, s + A\varepsilon - 8Aq\cos^2\varphi'$$

$$\lg \text{vulg}\, \varphi = \lg \text{vulg}\, \varphi^0 + 4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi'.\varphi^0 - 16Aq^2\sin^2 2\varphi' + \frac{8}{3}\frac{A}{r^2}q\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$

wo $r = 206264''8$ ist, oder die Gleichungen:

$$\lg \text{vulg}\, \varphi^0 = \lg \text{vulg}\, s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg \text{vulg}\, \varphi = \lg \text{vulg}\, \varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0^2},$$

wo

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43-17$$

ist.

Zur Bestimmung des Längenunterschiedes λ der beiden Endpunkte des Bogens s hat man die Gleichung:

$$\lambda = \cos l \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-e^2+e^2\sin^2 l\cos^2\varphi}}{1-\sin^2 l\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

(*Legendre* Exercices pag. 180), welche sich mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{\text{tg}\, l}{\sqrt{1-ee}} = \text{tg}\, B$$

auf die Form:

$$(5.) \qquad \lambda = \frac{\text{tg}\, l}{\sin B}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+\text{tg}^2 l\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

bringen läfst. Aus den Gleichungen:

$$e\sin B = k$$

und

$$\text{tg}\, B = \frac{\text{tg}\, l}{\sqrt{1-ee}}$$

ergiebt sich

$$e^2 = \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2\cos^2 l},$$

also

$$\sin B = \frac{k}{e} = \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\sin B$ in die Gleichung (5.), so erhält man:

$$(6.) \qquad \lambda = \frac{\text{cotg}\, l}{\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\text{cotg}^2 l + \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

In diese Gleichung führe man

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

als neue Variable ein, so dafs also

$$(7.) \quad \varphi = \operatorname{am} u$$

ist, und setze

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

wenn $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist. Alsdann ist:

$$\operatorname{cotg} l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k')$$

und da, wenn man $\sqrt{-1} = i$ setzt, nach Fund. pag. 34 Formel 1,

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia)$$

st, so folgt:

$$(8.) \quad \operatorname{cotg} l = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia).$$

Ferner ist:

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(a, k')},$$

welche Gröfse, wie gebräuchlich ist, mit $\Delta\operatorname{am}(a, k')$ bezeichnet wird, so dafs also

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \Delta\operatorname{am}(a, k').$$

Es ist aber nach Fund. pag. 34 Formel 2 und 4

$$\Delta\operatorname{am}(a, k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$

und folglich

$$(9.) \quad \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}.$$

Substituirt man die Gleichungen (7.), (8.) und (9.) in die Gleichung (6.), so erhält man:

$$(10.) \quad \lambda = \frac{1}{i}\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{\Delta\operatorname{am}(ia)}\int_{u'}^{u''} \frac{\Delta^2\operatorname{am}(u).du}{\sin^2\operatorname{am}(u) - \sin^2\operatorname{am}(ia)},$$

wo

$$\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u'$$

und

$$\int_0^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u''$$

bezeichnet ist. In die Gleichung (10.) lassen sich die elliptischen Functionen Θ und H, wie folgt, einführen. Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\sin\mathrm{am}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

$$\sin\mathrm{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(ia)}{\Theta(ia)},$$

also

$$\Delta^2\mathrm{am}(u) = 1 - k\frac{H^2(u)}{\Theta^2(u)}$$

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = 1 - k\frac{H^2(ia)}{\Theta^2(ia)}.$$

Hieraus folgt:

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u) = k\frac{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}{\Theta^2(ia)\Theta^2(u)}$$

und, wenn man Fund. pag. 175 Formel 21 benutzt,

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u) = \frac{k\Theta^2(0)H(u+ia)H(u-ia)}{\Theta^2(u)\Theta^2(ia)}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = k'\frac{\Theta^2(ia+K)}{\Theta^2(ia)}$$

oder, wenn man $\Theta(ia+K)$ durch $\Theta_1(ia)$ bezeichnet,

$$\Delta^2\mathrm{am}(ia) = k'\frac{\Theta_1^2(ia)}{\Theta^2(ia)}$$

und folglich:

$$1 - \frac{\Delta^2\mathrm{am}(u)}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)} = \frac{k}{k'}\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)}\frac{H(u+ia)H(u-ia)}{\Theta_1^2(ia)}.$$

Nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichung die Logarithmen und differenzirt alsdann in Bezug auf a, so erhält man:

$$\frac{-2ik^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)\Delta^2\mathrm{am}(u)}{\Delta\mathrm{am}(ia)\{\Delta^2\mathrm{am}(ia) - \Delta^2\mathrm{am}(u)\}} = \frac{iH'(u+ia)}{H(u+ia)} - \frac{iH'(u-ia)}{H(u-ia)} - \frac{2i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)},$$

oder

$$\frac{2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}{i\Delta\mathrm{am}(ia)} \cdot \frac{\Delta^2\mathrm{am}(u)}{(\sin^2\mathrm{am}(u) - \sin^2\mathrm{am}(ia))}$$

$$= i\left\{\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)} - \frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)} - \frac{2\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)}\right\},$$

wenn man $\frac{dH(u)}{du}$ durch $H'(u)$ und $\frac{d\Theta_1(u)}{du}$ durch $\Theta_1'(u)$ bezeichnet.

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (10.), so erhält man:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)}du - \tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)}du - \frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)}\int_{u'}^{u''}du$$

oder, wenn man die Integration ausführt und

$$\frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)} \text{ durch } \nu$$

bezeichnet,

$$(11.)\quad \lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u'')}{H(ia-u'')} - \tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u')}{H(ia-u')} - \nu(u''-u').$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\lg H(u) = \lg\{\sqrt{k}.\operatorname{sinam}(u).\Theta(u)\}.$$

Da aber nach Fund. pag. 99 Formel 6

$$\lg(\sqrt{k}.\operatorname{sinam} u) = \lg 2\sqrt[4]{q} + \lg\sin x + 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \cdots\right\}$$

und nach Fund. pag. 145

$$(12.)\quad \lg\Theta(u) = \text{Const} - 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)} + \cdots\right\},$$

wenn $u = \frac{2Kx}{\pi}$ gesetzt ist, so folgt:

$$\lg H(u) = \text{Const} + \lg\sin x - 2\left\{\frac{q^2\cos 2x}{1-q^2} + \frac{q^4\cos 4x}{2(1-q^4)} + \cdots\right\}.$$

Führt man diese Entwickelung in die Gleichung (11.) ein, indem man $u' = \frac{2Kx'}{\pi}$, $u'' = \frac{2Kx''}{\pi}$ und $a = \frac{2K\alpha}{\pi}$ setzt und diejenigen Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt, so wird:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{\sin(i\alpha+x'')\sin(i\alpha-x')}{\sin(i\alpha-x'')\sin(i\alpha+x')} - \frac{2K\nu}{\pi}(x''-x')$$
$$+\frac{1}{i}q^2\{\cos 2(i\alpha+x'') + \cos 2(i\alpha-x') - \cos 2(i\alpha-x'') - \cos 2(i\alpha+x')\}$$

oder, wenn man, wie schon oben geschehen ist, $x''-x' = x$ und $\frac{1}{2}(x''+x') = X$ setzt,

$$(13.)\quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x''}{\operatorname{tg}i\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x'}{\operatorname{tg}i\alpha} - \frac{2K\nu}{\pi}x - \frac{4}{i}q^2\sin 2i\alpha\sin x\cos 2X.$$

Da $\Theta_1(ia) = \Theta(ia+K) = \Theta\left\{\frac{2K}{\pi}\left(i\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ist, so erhält man, wenn man in die Gleichung (12.), $i\alpha+\frac{\pi}{2}$ statt x setzt,

$$\lg\Theta_1(ia) = \text{Const} + 2\left\{\frac{q\cos 2i\alpha}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4i\alpha}{2(1-q^4)} + \cdots\right\}$$

und durch Differenziation dieser Gleichung in Bezug auf α, mit Berücksichtigung der Gleichung $\frac{d\lg\Theta_1(ia)}{d\alpha} = \frac{2Ki}{\pi}\frac{\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)} = \frac{2K\nu}{\pi}$,

$$\frac{2K\nu}{\pi} = -4i\left\{\frac{q\sin 2i\alpha}{1-q^2} - \frac{q^2\sin 4i\alpha}{1-q^4} + \cdots\right\}$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\frac{2K\nu}{\pi} = 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i} - 4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}.$$

Diese Formel, in die Gleichung (13.) substituirt, ergiebt

$$(14.)\quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x''}{\operatorname{tg}i\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x'}{\operatorname{tg}i\alpha} - 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i}x + 4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}x - 4q^2\frac{\sin 2i\alpha}{i}\sin x\cos 2X.$$

Führt man statt der Gröfse α einen Winkel A ein, welcher durch die Gleichung:

$$\alpha = \lg\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A$$

definirt wird, so ist:

$$\cos i\alpha = \frac{1}{\sin A},\quad \frac{\sin i\alpha}{i} = \operatorname{cotg}A,\quad \frac{\operatorname{tg}i\alpha}{i} = \cos A,$$

$$\frac{\sin 2i\alpha}{i} = \frac{2\cos A}{\sin^2 A},\qquad \cos 2i\alpha = \frac{1+\cos^2 A}{\sin^2 A}.$$

Substituirt man diese verschiedenen Ausdrücke in die Gleichung (14.) und setzt in das letzte Glied, welches q^2 enthält, x statt $\sin x$, so wird:

$$(15.)\quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x''}{\cos A} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x'}{\cos A} - 8q\frac{\cos A}{\sin^2 A}x + 8q^2\frac{\cos A}{\sin^2 A}x\left\{\frac{2(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A} - \cos 2X\right\}.$$

Um den Werth des Winkels A zu finden, hat man die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

$$\text{also}\quad \frac{\pi}{2} - l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\operatorname{am}(a,k') + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5\operatorname{am}(a,k') - \cdots$$

Da aber nach Fund. pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i},$$

so ist:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i} + \tfrac{1}{3}\frac{\sin^3\operatorname{am}(ia)}{i} + \tfrac{1}{5}\frac{\sin^5\operatorname{am}(ia)}{i} + \cdots$$

also

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin \operatorname{am}(ia)}{1 - \sin \operatorname{am}(ia)}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin \operatorname{am} \frac{2Ki\alpha}{\pi}}{1 - \sin \operatorname{am} \frac{2Ki\alpha}{\pi}}.$$

Benutzt man zur Entwickelung dieser Gleichung Fund. pag. 99 Formel 9, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin i\alpha}{1 - \sin i\alpha} + \frac{4}{i} \left\{ \frac{q \sin i\alpha}{1-q} - \frac{q^3 \sin 3i\alpha}{3(1-q^3)} + \cdots \right\}$$

oder, wenn die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - l &= \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + \sin i\alpha}{1 - \sin i\alpha} + \frac{4}{i} \frac{q}{1-q} \sin i\alpha \\ &= \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i \operatorname{cotg} A}{1 - i \operatorname{cotg} A} + \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} A \\ &= \frac{\pi}{2} - A + \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} A \end{aligned}$$

und folglich:

$$l = A - \frac{4q}{1-q} \operatorname{cotg} A.$$

Nun kann man aber statt dieser Formel, um λ mit genügender Schärfe zu berechnen, setzen:

$$l = A - 4q \operatorname{cotg} A,$$

oder

$$(16.) \qquad A = l + 4q \operatorname{cotg} l.$$

Eine andere bemerkenswerthe Formel zur Berechnung von A findet man aus der schon oben aufgestellten Gleichung:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2 \cos^2 l} \\ &= \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - l \right)} \\ &= \frac{k^2}{1 - k'^2 \sin^2 \operatorname{am}(a, k')} \\ &= \frac{k^2}{\Delta^2 \operatorname{am}(a, k')}, \end{aligned}$$

also

$$1-e^2 = \frac{1-k'^2\sin^2\mathrm{am}(a,k')-k^2}{\Delta^2\mathrm{am}(a,k')} = \frac{k'^2\cos^2\mathrm{am}(a,k')}{\Delta^2\mathrm{am}(a,k')},$$

oder nach Fund. pag. 34 Formel 4:

$$1-e^2 = \frac{k'^2}{\Delta^2\mathrm{am}(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\lg(1-e^2) = \lg\frac{\Delta\mathrm{am}(ia)}{k'}$$

oder, wenn man die Entwickelungen Fund. pag. 99 Formel 8 und pag. 104 Formel 15 benutzt,

$$\varepsilon = \frac{4q\cos 2i\alpha}{1-q^2} + \frac{3q^3\cos 6i\alpha}{3(1-q^6)} + \cdots + 4q + \tfrac{16}{3}q^3 + \cdots$$

Vernachlässigt man endlich die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, so bekommt man die Gleichung:

$$\varepsilon = 4q\cos 2i\alpha + 4q = 8q\cos^2 i\alpha$$

oder

$$(17.) \qquad \varepsilon = \frac{8q}{\sin^2 A},$$

welche die zur Berechnung von A in den neun ersten Decimalstellen genaue Formel:

$$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2q}}$$

ergiebt.

Macht man von dieser Formel Gebrauch, so erhält man aus Gleichung (15.) für λ die Gleichung:

$$(18.) \qquad \lambda = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x''}{\cos A} - \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x'}{\cos A} - \varepsilon\cos A x\{1-\tfrac{1}{2}\varepsilon+2q+q\cos 2X\}.$$

Durch Berechnung des Dreiecks $PO'O''$ nach einer zweckmäfsigen Methode (*Gaufs*, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844, pag. 32) wird man gleichzeitig mit $l'-l''$ und $T''-T'''$ den Winkel $O'PO'' = \omega$ erhalten. Die Correction, welche von dem Winkel ω zu subtrahiren ist, um λ zu geben, sei $\Delta\omega$. Die Bestimmung dieser Correction $\Delta\omega$ erhält man auf folgendem Wege. — Es sei

$$O'PO = \omega' \quad \text{und} \quad O''PO = \omega''.$$

Alsdann ist:

$$\mathrm{cotg}\,\omega' = \frac{\cos l}{\mathrm{tg}\,\varphi'} = \frac{\sin\mathrm{am}(a,k')}{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(u')}$$

und nach Fund. pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{cotg}\omega' = \frac{i \sin\mathrm{am}(a, k')}{\sin\mathrm{am}(iu', k')},$$

folglich

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}(iu', k') - \sin\mathrm{am}(a, k')}{\sin\mathrm{am}(iu', k') + \sin\mathrm{am}(a, k')}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)+\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} - \sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)-\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)+\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} + \sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a)-\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Subtractions- und Additions-Formel (Fund. pag. 32 Formel 4 und 1) an, so wird:

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \cos\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\}}{\sin\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \cos\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}$$

$$= \frac{1}{2i} \lg \frac{\operatorname{tg}\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\}}{\operatorname{tg}\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'+a), k'\} \Delta\mathrm{am}\{\frac{1}{2}(iu'-a), k'\}}$$

oder, nach Fund. pag. 34 Formel 3 und 4,

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)\cos\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)}{\Delta\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'+ia)} - \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)\cos\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)}{\Delta\mathrm{am}\frac{1}{2}(u'-ia)}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Fund. pag. 99 Formel 6, 7 und 8, so wird:

$$\text{(19.)} \quad \frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} + \frac{q^2 \cos 2(x'+i\alpha)}{i(1+q^2)} + \frac{q^4 \cos 4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^4)} + \cdots$$
$$- \frac{q^2 \cos 2(x'-i\alpha)}{i(1+q^2)} - \frac{q^4 \cos 4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^4)} - \cdots$$

Diese Entwickelung erhält man auf kürzerem Wege durch Anwendung der *Legendre*'schen Transformation der zweiten Ordnung, indem man den Ausdruck $\frac{1}{2i} \lg \sin\mathrm{am}(u'+ia) - \frac{1}{2i} \lg \sin\mathrm{am}(u'-ia)$, nach Fund. pag. 99 Formel 6, in die Reihe

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} + \frac{q \cos 2(x'+i\alpha)}{i(1+q)} + \frac{q^2 \cos 4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^2)} + \cdots$$
$$- \frac{q \cos 2(x'-i\alpha)}{i(1+q)} - \frac{q^2 \cos 4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^2)} - \cdots$$

entwickelt und alsdann q^2 statt q setzt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (19.):

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{1}{2i} \lg \frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)} - \frac{2}{i} \left\{ \frac{q^2}{1+q^2} \sin 2i\alpha \sin 2x' + \frac{q^4}{2(1+q^4)} \sin 4i\alpha \sin 4x' + \cdots \right\}$$

die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, so wird:

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} i\alpha}{i \operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{1+q^2} \frac{\cos A}{\sin^2 A} \sin 2x'$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos A}{\operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{\sin^2 A} \cos A \sin 2x'$$

oder wenn man die Gleichung (17.) benutzt,

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} - \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A \sin 2x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - \omega'' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A \sin 2x''$$

und folglich

$$\omega'' - \omega' = \omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \tfrac{1}{2} \varepsilon q \cos A (\sin 2x'' - \sin 2x').$$

Da $\sin 2x'' - \sin 2x' = 2 \sin x \cos 2X$, also näherungsweise

$$\sin 2x'' - \sin 2x' = 2x \cos 2X$$

ist, so wird

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \varepsilon q x \cos A \cos 2X.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (18.), so erhält man

$$\Delta\omega = \varepsilon x \cos A \{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2q + 2q \cos 2X\}$$

oder

$$\Delta\omega = \varepsilon x \cos A \{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 4q \cos^2 X\}$$

oder endlich, wenn man, wie bisher, $\varepsilon^2 q$ in den Gliedern, die s oder x enthalten, vernachlässigt,

$$\Delta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos A (1 + 4q \cos^2 X).$$

Nach Gleichung (16.) ist:

$$A = l + 4q \operatorname{cotg} l$$

also

$$\cos A = \cos(l + 4q \operatorname{cotg} l)$$
$$= (1 - 4q) \cos l$$

und folglich wird die gesuchte Correction:

$$\Delta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos l (1 - 4q \sin^2 X)$$

und

$$\lg \Delta\omega = \lg \{(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) x \cos l\} - 4q \sin^2 X.$$

Setzt man in diese Gleichung näherungsweise

$$\begin{aligned} x &= \varphi - 2q(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi') \\ &= \varphi - 4q\varphi\cos 2\Phi \\ &= \varphi(1 \quad 4q\cos 2\Phi) \end{aligned}$$

also

$$\lg x = \lg\varphi - 4q\cos 2\Phi$$

und

$$X = \Phi,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \lg \Delta\omega &= \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos 2\Phi - 4q\sin^2\Phi \\ &= \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos^2\Phi \end{aligned}$$

und, wenn man $\Phi = \varphi' + \frac{1}{2}\varphi^0$ setzt,

$$(20.) \quad \lg\Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8q\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}(4q\varphi^0\sin 2\varphi').$$

Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von $\Delta\omega$ hat man demnach die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\lg \operatorname{vulg}\Delta\omega \\ &= \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + \lg\operatorname{vulg}(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8Aq\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}\left(4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi'.\varphi^0\right) \end{aligned}$$

oder mit einer schon oben gebrauchten Bezeichnung

$$\lg\operatorname{vulg}\Delta\omega = \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}fq\cos^2\varphi' + \tfrac{1}{2}gq\sin^2\varphi'.\varphi^0$$

oder endlich, wenn man

$$fq\cos^2\varphi' = C \quad \text{und} \quad gq\sin^2\varphi'\varphi^0 = D$$

setzt,

$$\lg\operatorname{vulg}\Delta\omega = \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Es ist jetzt noch die Formel abzuleiten, durch welche man aus der reducirten Breite l'' die Breite B'' oder aus der Gröfse $l' - l''$ die Gröfse $B' - B''$ erhält.

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1-ee}}$$

ergiebt sich die bekannte Gleichung:

$$B' - l' = \frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\sin 2l' + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^2\sin 4l' + \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^3\sin 6l' + \cdots$$

Entwickelt man $\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}}$ in eine Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4.6}e^4+\frac{3.5}{4.6.8}e^6+\frac{3.5.7}{4.6.8.10}e^8+\cdots$$

und, wenn man $\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{1}{2}\lg\sqrt{1-e^2}$ in eine Reihe entwickelt,

$$\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4+\tfrac{1}{12}e^6+\tfrac{1}{16}e^8+\cdots$$

Beide Reihen weichen erst in Gliedern, welche die sechste und höhere Potenzen von e enthalten, von einander ab. Ihr Unterschied ist nämlich

$$\tfrac{1}{192}e^6+\tfrac{1}{128}e^8+\cdots$$

Es kann daher

$$\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

gesetzt werden, und man erhält:

$$(21.)\qquad B'-l' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l'+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l'+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l'+\cdots$$

Ebenso wird:

$$(22.)\qquad B''-l'' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l''+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l''+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l''+\cdots$$

Subtrahirt man die untere Gleichung von der obern, so wird:

$$B'-B'' = l'-l''+\varepsilon\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l'')+\cdots$$

oder, in Secunden ausgedrückt,

$$B'-B'' = l'-l''+k\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+n\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l''),$$

wo $\lg k = \lg r\varepsilon = 2{,}83926$ und $\lg n = \lg\frac{1}{4}r\varepsilon^2 = 9{,}7620$ ist.

* * *

Einfache Formeln, um den Einfluss der Ellipticität des Erdmeridians auf die berechneten Winkel T'', B'', λ annähernd schätzen zu können, erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Man stelle sich einen sphärischen Triangel vor, der die Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $180^0-T'$ habe. Die dritte Seite sei $\frac{\pi}{2}-B_0''$, und die den Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$ gegenüberliegenden Winkel seien respective λ_0 und T_0'. Diese Winkel $\frac{\pi}{2}-B_0''$, λ_0 und T_0'' würden die Werthe von $\frac{\pi}{2}-B''$, λ und T'' sein, wenn die Erde eine Kugel wäre. Setzt man

$$B'' = B_0''+\Delta B_0'', \qquad T'' = T_0'+\Delta T_0'', \qquad \lambda = \lambda_0+\Delta\lambda_0,$$

so sind $\Delta B_0''$, $\Delta T_0''$, $\Delta\lambda_0$ die Correctionen, welche den Werthen B_0'', T_0'', λ_0

wegen der Ellipticität der Erde hinzuzufügen sind. Setzt man ferner:

$$\varphi = s + \delta s \qquad l' = B' + \delta B'$$
$$\omega = \lambda_0 + \delta\lambda_0 \qquad l'' = B_0'' + \delta B_0'',$$

so sind $\delta\lambda_0$, $\delta B_0''$ und $\Delta T''$ die Correctionen, welche von ω, l'' und T'' zu subtrahiren sind, wenn man die beiden Seiten φ und $\frac{\pi}{2} - l'$ des sphärischen Hülfstriangels in s und $\frac{\pi}{2} - B'$ übergehen, den Winkel $180^0 - T'$ aber ungeändert läfst, und es werden:

$$\Delta\lambda_0 = \delta\lambda_0 - (\omega - \lambda)$$
$$\Delta B_0'' = \delta B_0'' - (l'' - B'')$$

sein.

Aus der Gleichung zur Berechnung von φ erhält man näherungsweise:

$$\lg\varphi = \lg s + \varepsilon - 8q\cos^2 X$$

also

$$\varphi = s(1 + \varepsilon - 8q\cos^2 X)$$
$$\delta s = s(\varepsilon - 8q\cos^2 X).$$

Setzt man in diese Gleichung die Näherungswerthe:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}e^2$$
$$8q = \tfrac{1}{2}k^2 = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 B \text{ oder } = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l$$
$$\text{und } \cos^2 X = \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \text{ oder } = \cos^2\varphi',$$

so erhält man:

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s(1 - \sin^2 l\cos^2\varphi')$$
$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 l'$$

oder

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 B'.$$

Aus der Gleichung (21.) erhält man die Näherungsformel:

$$\delta B' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die Gleichung (20.) giebt:

$$\omega - \lambda = \varepsilon\varphi\cos l \quad \text{oder} \quad \omega - \lambda = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos B'\sin T'$$

und endlich die Gleichung (22.):

$$l'' - B'' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die bekannten Differentialformeln für einen sphärischen Triangel, dessen Seiten durch α, β, γ und dessen Winkel durch A, B, T' bezeichnet, und in

welchem die Seiten β und γ variabel, der eingeschlossene Winkel A aber constant gesetzt werden, sind:

$$d\alpha = \cos\Gamma d\beta + \cos B d\gamma$$
$$dB = \frac{\sin\Gamma}{\sin\alpha} d\beta - \frac{\sin B}{\operatorname{tg}\alpha} d\gamma$$
$$d\Gamma = -\frac{\sin\Gamma}{\operatorname{tg}\alpha} d\beta + \frac{\sin B}{\sin\alpha} d\gamma.$$

Setzt man in diese Gleichungen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - l'' \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - l' \qquad \gamma = \varphi$$
$$A = \pi - T' \qquad B = T'' \qquad \Gamma = \omega$$
$$d\alpha = \delta B_0'' \qquad d\beta = dB' \qquad d\gamma = -\delta s$$
$$dA = 0 \qquad dB = -\Delta T_0'' \qquad d\Gamma = -\delta\lambda_0,$$

so erhält man:

$$\delta B_0'' = \cos\omega \delta B' - \cos T'' \delta s$$
$$\Delta T_0'' = -\frac{\sin\omega}{\cos l''} \delta B' - \frac{\sin T''}{\operatorname{cotg} l''} \delta s$$
$$\delta\lambda_0 = \frac{\sin\omega}{\operatorname{cotg} l''} \delta B' + \frac{\sin T''}{\cos l''} \delta s.$$

Vernachlässigt man in diesen Gleichungen die Glieder von der Ordnung s^2 in den Coefficienten von $\delta B'$ und von der Ordnung s in den Coefficienten von δs, so kann man statt T'' und l'' respective T' und B', und ferner

$$\sin\omega = \frac{\sin T'}{\cos B'} s$$

und $\cos\omega = 1$ setzen. Dadurch erhält man:

$$\delta B_0'' = \delta B' - \cos T' \delta s$$
$$\Delta T_0'' = -\frac{\sin T'}{\cos^2 B'} s\delta B' - \frac{\sin T'}{\operatorname{cotg} B'} \delta s$$
$$\delta\lambda_0 = \frac{\sin T' \sin B'}{\cos^2 B'} s\delta B' + \frac{\sin T''}{\cos B'} \delta s$$

und, wenn man für $\delta B'$ und δs die oben gefundenen Werthe setzt,

$$\delta B_0'' = -\tfrac{1}{4} e^2 \sin 2B' - \tfrac{1}{2} e^2 s \cos^2 B' \cos T'$$
$$\Delta T_0'' = \tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\sin^3 B'}{\cos B'} \sin T'$$
$$\delta\lambda_0 = \tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'} \sin T'$$

und folglich:

$$\Delta B_0'' = -\tfrac{1}{2} e^2 s \cos^2 B' \cos T'',$$

$$\Delta T_0' = \tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T''$$

$$\Delta \lambda_0 = -\tfrac{1}{2} e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T''.$$

Diese den Einflufs der Ellipticität der Erde auf die Gröfsen B'', T'', λ richtig ergebenden Näherungs-Formeln weichen von den *Jacobi*schen pag. 41 dieses Bandes gegebenen ab, welche Abweichung wohl in kleinen Rechnungsfehlern ihren Grund hat.

* * *

Um schliefslich die sämmtlichen Gröfsen, welche bei der geodätischen Linie in Betracht kommen, durch die elliptischen Functionen Θ, H, Θ_1 und H_1 auszudrücken, wenn

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u) \text{ und } H_1(u) = H(K-u)$$

ist, werden statt der beiden Constanten, der Excentricität e und der Breite B des Punktes, in welchem die geodätische Linie auf dem Meridian senkrecht steht, der Modul k der elliptischen Functionen (oder sein Complement k') und das Argument a als Constante mittelst der Gleichungen:

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a,k')}, \qquad \cos B = k' \sin \operatorname{am}(a,k')$$

eingeführt.

Alsdann ist nach Fund. pag. 34 Formel 5:

$$e = k \sin \operatorname{coam}(ia,k) = k \sin \operatorname{am}(K-ia,k),$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$e = \sqrt{k} \cdot \frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}$$

und folglich

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{\Theta_1^2(ia) - kH_1^2(ia)}}{\Theta_1(iu)}$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)}.$$

Ferner ist:

$$\sin B = \Delta \operatorname{am}(a,k') = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia)}{\cos \operatorname{am}(ia)} = \sqrt{k} \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\cos B = k' \sin \mathrm{am}(a, k') = \frac{k'}{i} \mathrm{tg}\, \mathrm{am}(ia) = \frac{\sqrt{k'}}{i} \frac{H(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \mathrm{tg}\, B = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\mathrm{tg}\, l = \sqrt{1-e^2}\, \mathrm{tg}\, B = \sqrt{k} \frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}$$

$$\text{also} \quad \sin l = \frac{\sqrt{k}.i\Theta(ia)}{\sqrt{H^2(ia) - k\Theta^2(ia)}} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \cos l = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}.$$

Nach den Formeln fürs rechtwinklige sphärische Dreieck ist:

$$\sin l' = \sin l \cos \varphi'$$

$$\mathrm{tg}\, T'' = \frac{\mathrm{cotg}\, l}{\sin \varphi'}$$

$$\mathrm{tg}\, \omega' = \frac{\mathrm{tg}\, \varphi'}{\cos l}.$$

Setzt man in diese Gleichungen $\varphi' = \mathrm{am}(u)$, so wird:

$$\sin l' = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cos \mathrm{am}(u) = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$$

$$\mathrm{tg}\, T' = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{1}{\sin \mathrm{am}(u)} = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\mathrm{tg}\, \omega' = \sqrt{k'} \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \mathrm{tg}\, \mathrm{am}(u) = \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \frac{H(u)}{H_1(u)}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$(23.) \quad \begin{cases} \cos l' = \dfrac{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia) H_1^2(u)}}{H_1(ia)\Theta(u)} \\ \mathrm{tg}\, l' = \dfrac{\Theta(ia) H_1(u)}{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia) H_1^2(u)}} \\ \sin T' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia) H^2(u)}} \\ \cos T' = \dfrac{i\Theta(ia) H(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia) H^2(u)}} \\ \sin \omega' = \dfrac{iH_1(ia) H(u)}{\sqrt{H^2(ia) H_1^2(u) - H_1^2(ia) H^2(u)}} \\ \cos \omega' = \dfrac{H(ia) H_1(u)}{\sqrt{H^2(ia) H_1^2(u) - H_1^2(ia) H^2(u)}}. \end{cases}$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(u) - H^2(u)\}.$$

Hieraus folgt:

$$H_1^2(ia)\Theta^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}$$

$$\Theta^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)\}$$

$$H^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{kH^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\}$$

$$H_1^2(ia)H^2(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)H^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\},$$

also

$$H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u) = \frac{1}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}$$

$$H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u) = -\frac{k}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}.$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (23.), so wird:

(24.)
$$\begin{cases} \cos l' = \dfrac{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}{\sqrt{k'}.H_1(ia)\Theta(u)} \\ \operatorname{tg} l' = \dfrac{\sqrt{k'}.\Theta(ia)H_1(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \sin T'' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{i\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \cos T'' = \dfrac{\Theta(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \sin \omega' = \dfrac{\sqrt{k}\,H_1(ia)H(u)}{\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}} \\ \cos \omega' = \dfrac{\sqrt{k}\,H(ia)H_1(u)}{i\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}. \end{cases}$$

Da nun nach Fund. pag. 175 Formel 21

$$H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia) = \Theta^2(0)H(u+ia)H(u-ia),$$

so ist, wenn man $\sqrt{H(u+ia)H(u-ia)} = N$ setzt,

$$\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia)} = \Theta(0)N.$$

Ferner ist nach Fund. pag. 173 Formel 2:

$$\frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}} = \Theta_1(0)$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\Theta(0) = H_1(0).$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (24.), so wird:

$$\cos l' = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)}; \qquad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin T'' = \frac{H(ia)}{i\Theta(0)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N}; \qquad \cos T'' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H(u)}{N}$$

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(0)}\cdot\frac{H(u)}{N}; \qquad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Setzt man in die Gleichung

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1-e^2}}$$

für $\operatorname{tg} l'$ und $\sqrt{1-e^2}$ die gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N},$$

also

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{\sqrt{\Theta^2(0)N^2+\Theta_1^2(ia)\,H_1^2(u)}} = \frac{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

und

$$\cos B' = \frac{\Theta(0)N}{H_1(ia)\,\Theta_1(u)}.$$

Denkt man sich den Triangel POO' so construirt, dafs $\frac{\pi}{2} - PO'$ nicht gleich der reducirten Breite l', sondern gleich der wahren Breite B' ist, und bezeichnet man durch l_0, φ_0', ω_0' die Werthe, welche unter dieser Voraussetzung die Gröfsen l, φ', ω' annehmen, so wird

$$\cos l_0 = \cos B' \sin T'' = \frac{H(ia)\,\Theta(0)}{iH_1(ia)\,\Theta_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0' = \operatorname{cotg} B' \cos T'' = \frac{\Theta(ia)\,H(u)}{\Theta_1(ia)\,H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega_0' = \frac{\operatorname{cotg} T''}{\sin B'} = \frac{i\Theta(ia)\,H_1(ia)}{\Theta(ia)\,H(ia)}\cdot\frac{H(u)\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)\,H_1(u)}.$$

Bezeichnet man endlich mit λ' die Länge des Punktes, welchem der Werth $\varphi' = \operatorname{am}(u)$ entspricht, wenn diese Länge von dem Meridian an gezählt wird, auf welchem die geodätische Linie senkrecht steht, so erhält man aus Formel (11.), indem $u'' = u$ und $u' = 0$ gesetzt wird,

$$\lambda' + \nu u = \tfrac{1}{2} i \lg \frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} = i \lg \sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

wo $\nu = \frac{d \lg \Theta_1(ia)}{da}$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$e^{(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)}}, \quad e^{-(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

also

$$\sin(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2}\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{N}$$

und

$$\cos(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2i}\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{N}.$$

Mithin ist:

$$\cos B' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta_1(u)}$$

$$\cos B' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta_1(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)}{2H_1(ia)\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta(u)}.$$

Königsberg, den 15. Juli 1855.

6.

Darstellung der elliptischen Funktionen durch Potenzreihen.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

Die vier Reihen

$$\begin{aligned}
\vartheta x &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots \\
\vartheta_1 x &= 2\{\sqrt[4]{q}\sin x - \sqrt[4]{q^9}\sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots\} \\
\vartheta_2 x &= 2\{\sqrt[4]{q}\cos x + \sqrt[4]{q^9}\cos 3x + \sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots\} \\
\vartheta_3 x &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots
\end{aligned}$$

bilden den Nenner und die Zähler der Brüche, durch welche ich in meinen *Fundam. Nov.* die elliptischen Funktionen

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}, \qquad \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

dargestellt habe. Ich will im Folgenden diese vier Reihen nach Potenzen von x entwickeln.

Man hat hiezu ein einfaches Mittel durch die in die Augen springende Eigenschaft dieser Reihen, dafs wenn man

$$\log\sqrt[4]{q} = h$$

setzt, ihr erstes nach h genommenes Differential den entgegengesetzten Werth wie ihr zweites nach x genommenes Differential hat. Hieraus folgt sogleich auch, dafs ihr m^{tes} nach h genommenes Differential ihrem $(2m)^{\text{ten}}$ nach x genommenen Differential gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, so dafs man die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2m}\vartheta x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta x}{\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m+1}\vartheta_1 x}{\partial x^{2m+1}} &= (-1)^m\frac{\partial^{m+1}\vartheta_1 x}{\partial x\,\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m}\vartheta_2 x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta_2 x}{\partial h^m}, \\
\frac{\partial^{2m}\vartheta_3 x}{\partial x^{2m}} &= (-1)^m\frac{\partial^m\vartheta_3 x}{\partial h^m}.
\end{aligned}$$

Um die vorgelegten Entwicklungen zu erhalten, mufs man die Werthe kennen, welche die nach x genommenen geraden Differentiale von ϑx, $\vartheta_2 x$, $\vartheta_3 x$ und die ungeraden Differentiale von $\vartheta_1 x$ für $x=0$ annehmen. Wenn man statt dieser Differentiale die Ausdrücke rechts setzt, so erlangt man den Vortheil, dafs man den speciellen Werth 0, für welchen allein man ihre Werthe zu kennen braucht, vor den nach h anzustellenden Differentiationen in die Funktionen

$$\vartheta(x), \quad \frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial x}, \quad \vartheta_2(x), \quad \vartheta_3(x)$$

substituiren kann, und dann nur diese speciellen Werthe, welche sie für $x=0$ annehmen, nach h zu differentiiren hat. Nach in den *Fund. nov.* gegebenen Formeln hat man

$$\vartheta_3(0)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \vartheta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

und es wurde dort der Werth, welchen $\frac{\partial \vartheta_1 x}{\partial x}$ für $x=0$ annimmt, gleich dem Product der vorstehenden drei Werthe gefunden oder gleich

$$\sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\right)}.$$

Wenn man daher nach den nach x ausgeführten Differentiationen $x=0$ setzt, so erhält man

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^{2m}\vartheta_3 x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2K}{\pi}}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m+1}\vartheta_1 x}{\partial x^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\right)}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m}\vartheta_2 x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}}{\partial h^m}, \\ \frac{\partial^{2m}\vartheta x}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \frac{\partial^m \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}}{\partial h^m}. \end{cases}$$

Hieraus folgt zufolge des *Maclaurin*'schen Satzes, wenn man mit A, A_1, A_2 die drei Gröfsen

$$\frac{2K}{\pi}=A, \quad \frac{2kK}{\pi}=A_1, \quad \frac{2k'K}{\pi}=A_2$$

und mit Πn das Product $1.2.3\ldots n$ bezeichnet

$$(2.)\quad \begin{cases} \vartheta_3 x = \sqrt{A} - \frac{\partial\sqrt{A}}{\partial k}\frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial k^2}\frac{x^4}{\Pi 4} - \frac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial k^3}\frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta_2 x = \sqrt{A_1} - \frac{\partial\sqrt{A_1}}{\partial k}\frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{\partial^2\sqrt{A_1}}{\partial k^2}\frac{x^4}{\Pi 4} - \frac{\partial^3\sqrt{A_1}}{\partial k^3}\frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \\ \vartheta x = \sqrt{A_2} - \frac{\partial\sqrt{A_2}}{\partial k}\frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{\partial^2\sqrt{A_2}}{\partial k^2}\frac{x^4}{\Pi 4} - \frac{\partial^3\sqrt{A_2}}{\partial k^3}\frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots \end{cases}$$

Ferner, wenn man

$$D = \sqrt[3]{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)}$$

setzt.

$$(3.)\quad \vartheta_1 x = D.x - \frac{\partial D}{\partial k}\frac{x^3}{\Pi 3} + \frac{\partial^2 D}{\partial k^2}\frac{x^5}{\Pi 5} - \frac{\partial^3 D}{\partial k^3}\frac{x^7}{\Pi 7} + \cdots$$

Ich will jetzt die Formeln angeben, durch welche man die nach k genommenen Differentialquotienten am bequemsten nach einander findet.

Es sei

$$B = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi},$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi},$$

$$B_2 = -\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right),$$

so wird, wie ich in einer früheren Abhandlung (Bd. II S. 24 meiner mathematischen Werke oder *Crelle's* Journal Bd. XXXVI S. 100) gezeigt habe,

$$\frac{\partial A}{\partial k} = 2A^2B, \qquad \frac{\partial B}{\partial k} = 2k^2k'^2A^3,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial k} = 2A_1^2B_1, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial k} = -\frac{2k'^2}{k^4}A_1^3,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial k} = 2A_2^2B_2, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial k} = -\frac{2k^2}{k'^4}A_2^3,$$

$$\frac{\partial.k^2}{\partial k} = -\frac{\partial.k'^2}{\partial k} = 4k^2k'^2A^2 = 4k'^2A_1^2 = 4k^2A_2^2,$$

in welchen Formeln man $d\log q$ durch $4\,dk$ ersetzt hat *). Aus der letzten dieser Formeln folgt

*) Die hier gebrauchte Bezeichnung unterscheidet sich von der in der angeführten früheren Abhandlung angewandten überdies noch dadurch, dafs die Gröfse, die hier B_2 heifst, dort $= -B_2$ gesetzt war. Diese Aenderung ist der Symmetrie der Formeln wegen nothwendig.

$$\frac{\partial \log 2k^2k'^2}{\partial h} = 4(1-2k^2)A^2, \qquad \frac{\partial . 4(1-2k^2)}{\partial h} = -32k^2k'^2A^2,$$

$$\frac{\partial \log -\frac{2k'^2}{k^4}}{\partial h} = -4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)A_1^2, \qquad -\frac{\partial . 4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k'^2}{k^4}A_1^2,$$

$$\frac{\partial \log -\frac{2k^2}{k'^4}}{\partial h} = 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)A_2^2, \qquad \frac{\partial . 4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)}{\partial h} = 32\frac{k^2}{k'^4}A_2^2.$$

Es ergiebt sich hieraus, *dafs wenn man respective*

mit A eine der Gröfsen	$\frac{2K}{\pi}$,	$\frac{2kK}{\pi}$,	$\frac{2k'K}{\pi}$,
mit B eine der Gröfsen	$\frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}$,	$\frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi}$	$\frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right)$,
mit a eine der Gröfsen	$4(1-2k^2)$,	$-4\left(\frac{2}{k^2}-1\right)$,	$4\left(\frac{2}{k'^2}-1\right)$,
mit b eine der Gröfsen	$2k^2k'^2$,	$\frac{-2k'^2}{k^4}$,	$\frac{-2k^2}{k'^4}$

bezeichnet, wo immer $a^2 = 16(1-2b)$, *zwischen den Gröfsen*

$$A,\ B,\ a,\ b,\ h$$

die Differentialgleichungen

$$(4.) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, & \frac{\partial a}{\partial h} = -16bA^2, \\ \frac{\partial B}{\partial h} = bA^3, & \frac{\partial b}{\partial h} = abA^2 \end{cases}$$

Statt finden.

Der vorstehende Satz gewährt die grofse Erleichterung, dafs man die nach h genommenen Differentialen der *drei* Funktionen

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

welche zu suchen sind, durch dieselben Formeln ausdrücken kann. Hat man nämlich den m^{ten} nach $h = \log\sqrt[4]{q}$ genommenen Differentialquotienten der ersten dieser Funktionen durch

$$A = \frac{2K}{\pi}, \quad B = \frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}, \quad a = 4(k'^2 - k^2), \quad b = 2k^2k'^2$$

ausgedrückt, so erhält man denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe

$$A=\frac{2kK}{\pi},\quad B=\frac{1}{k}\cdot\frac{2E}{\pi},\quad a=-\frac{4(1+k')}{k^2},\quad b=-\frac{2k'^2}{k^4}$$

substituirt, und denselben Differentialquotienten von $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, wenn man wieder in dem nämlichen Ausdrucke für A, B, a, b die Werthe

$$A=\frac{2k'K}{\pi},\quad B=\frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right),\quad a=\frac{4(1+k^2)}{k'^2},\quad b=-\frac{2k^2}{k'^4}$$

setzt. Man wird daher auch die vorgelegten Entwicklungen der drei Funktionen $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx durch dieselben Formeln darstellen können, wenn man die Entwicklungscoefficienten durch die Gröfsen A, B, a, b darstellt, und dann diesen Gröfsen die drei verschiedenen im obigen Satze angegebenen Bedeutungen giebt. Man hat ferner

$$D=\sqrt{\left(kk'\left(\frac{2k}{\pi}\right)^3\right)}=\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\cdot\sqrt{A^3},$$

wenn man den Gröfsen A und b ihre erste Bedeutung beilegt; und wenn man in dieser Formel den Gröfsen A und b ihre beiden andern Bedeutungen giebt, erhält man keine andere Veränderung, als dafs der Ausdruck mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt wird. Man wird daher den nach k genommenen Differentialquotienten dieses Ausdrucks und daher auch den Entwicklungscoefficienten von $\vartheta_1 x$ drei verschiedene Formen geben können, wenn man sie durch die Gröfsen A, B, a, b ausdrückt und dann diesen Gröfsen ihre dreierlei Bedeutung beilegt, wobei man nur die zweite und dritte Form, welche man so erhält, noch durch $\sqrt[4]{-1}$ zu dividiren hat.

Man bildet die verschiedenen Differentialquotienten von $\sqrt{A}$ nach einander mittelst der sich aus (4.) ergebenden Formel

$$(5.)\quad \frac{\partial H}{\partial k}=2A^2B\frac{\partial H}{\partial A}+bA^3\frac{\partial H}{\partial B}+abA^2\frac{\partial H}{\partial b}-16bA^2\frac{\partial H}{\partial a},$$

in welcher H eine beliebige Funktion von A, B, a, b bedeutet. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich

$$A^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial . A^{\frac{1}{2}}}{\partial k}=A^{\frac{3}{2}}B,$$

$$\frac{\partial^2 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial k^2}=3A^{\frac{5}{2}}B^2+bA^{\frac{9}{2}},$$

$$\frac{\partial^3 . A^{\frac{1}{2}}}{\partial k^3}=15A^{\frac{7}{2}}B^3+15bA^{\frac{11}{2}}B+abA^{\frac{13}{2}},$$

$$\frac{\partial^4.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^4} = 105A^{\frac{9}{2}}B^4 + 210bA^{\frac{13}{2}}B^2 + 28abA^{\frac{15}{2}}B + (a^2b - b^2)A^{\frac{17}{2}},$$

$$\frac{\partial^5.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^5} = 945A^{\frac{11}{2}}B^5 + 3150bA^{\frac{15}{2}}B^3 + 630abA^{\frac{17}{2}}B^2 + 45(a^2b - b^2)A^{\frac{19}{2}}B + (a^3b - 6ab^2)A^{\frac{21}{2}}$$

u. s. w. u. s. w.

Man sieht hier, dafs abgesehen von den Zahlenfaktoren die Coefficienten in jedem Differentialquotienten von Anfang an dieselben werden, nämlich, wenn man dem fehlenden Gliede den Coefficienten Null giebt, die folgenden:

$$1, \quad 0, \quad ab, \quad a^2b - b^2, \quad a^3b - 6ab^2, \quad \text{etc.}$$

Man sieht aber aus der angegebenen Art der Ableitung keinen Grund hiefür. Ich will daher und um ein Beispiel für diese Ableitung zu geben die Coefficienten der drei letzten Terme in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^6.A^{\frac{1}{2}}}{\partial h^6}$ aufsuchen. Bezeichnet man den zuletzt angegebenen 5ten Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ mit H, so hat man zufolge (5.) die vier Ausdrücke

$$2A^2B\frac{\partial H}{\partial A}, \quad bA^3\frac{\partial H}{\partial B}, \quad abA^2\frac{\partial H}{\partial b}, \quad -16bA^2\frac{\partial H}{\partial a}$$

zu bilden und dieselben zu addiren. Diese vier Ausdrücke ergeben respective die Terme

$$855(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}}B^2 + (21a^3b - 126ab^2)A^{\frac{23}{2}}B,$$
$$9450b^2A^{\frac{21}{2}}B^2 + 1260ab^2A^{\frac{23}{2}}B + 45(a^2b^2 - b^3)A^{\frac{25}{2}},$$
$$630a^2bA^{\frac{21}{2}}B^2 + (45a^3b - 90ab^2)A^{\frac{23}{2}}B + (a^4b - 12a^2b^2)A^{\frac{25}{2}},$$
$$-10080b^2A^{\frac{21}{2}}B^2 - 1440ab^2A^{\frac{23}{2}}B + (-48a^2b^2 + 96b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

und deren Summe

$$1485(a^2b - b^2)A^{\frac{21}{2}}B^2 + 66(a^3b - 6ab^2)A^{\frac{23}{2}}B + (a^4b - 15a^2b^2 + 51b^3)A^{\frac{25}{2}},$$

wo die beiden ersten Terme wieder die Factoren $a^2b - b^2$ und $a^3b - 6ab^2$ haben.

Man multiplicire jetzt $A^{\frac{1}{2}}$ und die angegebenen Werthe seiner Differentialquotienten nach einander mit den Gröfsen

$$1, \quad \frac{-x^2}{\Pi 2}, \quad \frac{x^4}{\Pi 4}, \quad \frac{-x^6}{\Pi 6}, \quad \frac{x^8}{\Pi 8}, \quad \frac{-x^{10}}{\Pi 10}$$

oder, was dasselbe ist, mit den Gröfsen

$$1,\quad -\frac{x^2}{2},\quad \frac{1}{\Pi 2}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{1.3},\quad -\frac{1}{\Pi 3}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{1.3.5},\quad \frac{1}{\Pi 4}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^4}{1.3.5.7},\quad -\frac{1}{\Pi 5}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^5}{1.3.5.7.9}$$

und addire die erhaltenen Producte, so bekommt man zufolge (2.) die Entwicklungen von $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b die verschiedenen angegebenen Bedeutungen giebt. Ordnet man die erhaltene Summe nach den Funktionen von a und b, in welche die einzelnen Terme multiplicirt sind, so erhält man:

$$A^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3+\frac{1}{\Pi 4}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^4-\cdots\right\}$$
$$+\frac{bA^{\frac{3}{2}}.x^4}{\Pi 4}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$-\frac{abA^{\frac{5}{2}}.x^6}{\Pi 6}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\cdots\right\}$$
$$+\frac{(a^2b-b^3)A^{\frac{7}{2}}.x^8}{\Pi 8}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{AB.x^2}{2}\right)^2-\cdots\right\}$$
$$-\frac{(a^3b-6ab^2)A^{\frac{9}{2}}.x^{10}}{\Pi 10}\left\{1-\frac{AB.x^2}{2}+\cdots\right\}$$
$$+\frac{(a^4b-15a^2b^2+51b^3)A^{\frac{11}{2}}.x^{12}}{\Pi 12}\left\{1-\cdots\right\}\quad \text{u. s. w.}$$

Dieser Ausdruck läfst noch ein anderes Gesetz erkennen, wonach man auch die Zahlenfactoren allgemein angeben kann, mit welchen dieselben ganzen rationalen Funktionen von a und b in den verschiedenen Differentialquotienten von $A^{\frac{1}{2}}$ zu multipliciren sind. Die in Klammern eingeschlossenen Reihen werden nämlich, so weit man aus der hier geführten Induction ersehen kann, dieselben und der aus der Entwicklung der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{1}{2}ABx^2}$$

sich ergebenden Reihe gleich. Bezeichnet man daher mit ϑx eine der drei Funktionen $\vartheta_3 x$, $\vartheta_2 x$, ϑx, je nachdem man den Gröfsen A, B, a, b ihre dreierlei Bedeutungen giebt, so erhält man zufolge der angestellten Induction

$$(6.)\qquad \vartheta x = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left(1+r_2\frac{A^2x^4}{\Pi 4}-r_3\frac{A^3x^6}{\Pi 6}+r_4\frac{A^4x^8}{\Pi 8}-\cdots\right),$$

wo

$$(7.)\qquad r_2=b,\quad r_3=ab,\quad r_4=a^2b-b^2,\quad r_5=a^3b-6ab^2,$$
$$r_6=a^4b-15a^2b^2+51b^3,\quad \text{etc.}$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, *dafs die Funktionen r_i rationale ganze Funktionen von a und b sind, und zwar, wenn man der Gröfse a eine, der Gröfse b zwei Dimensionen beilegt, homogene Funktionen der i^{ten} Dimension.*

Vergleicht man die Ausdrücke (6.) von ϑx mit dem Ausdrucke (2.),

$$\vartheta x = \sqrt{A} - \frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h}\cdot\frac{x^3}{\Pi 2} + \frac{\partial^2\sqrt{A}}{\partial h^2}\cdot\frac{x^4}{\Pi 4} - \frac{\partial^3\sqrt{A}}{\partial h^3}\cdot\frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots,$$

so erhält man

$$(8.)\quad \frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+1}}\{(m)_0 B^m + (m)_2 r_2 B^{m-2}A^2 + (m)_3 r_3 B^{m-3}A^3 \cdots + (m)_m r_m A^m\},$$

wo der Zahlenfactor

$$(9.)\quad (m)_i = \frac{\Pi(2m)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\Pi(2i)} = (2i+1)(2i+3)\ldots(2m-1)\frac{m.m-1\ldots m-i+1}{1.2.3\ldots i}$$

gefunden wird.

Ich will jetzt die Bedingungen untersuchen, welche Statt finden müssen, damit die beiden im Vorigen durch Induction gefundenen Gesetze sich erhalten. Diese Gesetze bestehen darin, dafs wenn man den Ausdruck (8.) noch einmal nach h differentiirt, in dem neuen Ausdrucke die algebraische Funktion, welche in $A^{\frac{2m+3}{2}+i}$ multiplicirt ist, unverändert $= r_i$ bleiben, und der Werth des Zahlenfactors aus $(m)_i$ durch Aenderung von m in $m+1$ erhalten werden mufs. Zufolge der Formel (5.) hat man

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 2A^2B\frac{\partial H}{\partial A} + bA^3\frac{\partial H}{\partial B} + abA^2\frac{\partial H}{\partial b} - 16bA^2\frac{\partial H}{\partial a}.$$

Der Term

$$A^{\frac{2m+3}{2}+i}B^{m+1-i}$$

entsteht zufolge dieser Formel aus den drei Termen

$$(m)_i r_i A^{\frac{2m+1}{2}+i}B^{m-i},$$

$$(m)_{i-2} r_{i-2} A^{\frac{2m-3}{2}+i}B^{m-i+2},$$

$$(m)_{i-1} r_{i-1} A^{\frac{2m-1}{2}+i}B^{m-i+1}$$

und erhält den Factor

$$(2m+2i+1)(m)_i r_i + (m-i+2)(m)_{i-2} r_{i-2} b + (m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}ab - 16(m)_{i-1}\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}b.$$

Dieser Ausdruck mufs $=(m+1)_i r_i$ werden. Es mufs daher

$$(10.)\quad \{(2m+2i+1)(m)_i-(m+1)_i\}r_i+(m-i+2)(m)_{i-2}br_{i-2}$$
$$+(m)_{i-1}ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16(m)_{i-1}b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}=0$$

sein. Diese Gleichung, welche eine Relation zwischen den Funktionen r_i, r_{i-1}, r_{i-2} ausdrückt, mufs von der Zahl m unabhängig sein, wenn diese Funktionen selbst von m unabhängig sein sollen. In der That hat man

$$(m+1)_i=\frac{(m+1)(2m+1)}{m-i+1}(m)_i,\qquad (m)_{i-1}=\frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i,$$

also

$$(m+1)_i-(2m+2i+1)(m)_i=\frac{i(2i-1)}{m-i+1}(m)_i=(m)_{i-1},$$

überdies der zweiten dieser drei Gleichungen analog

$$(m-i+2)(m)_{i-2}=(i-1)(2i-3)(m)_{i-1}.$$

Die Gleichung (10.) verwandelt sich daher nach Division durch $(m)_{i-1}$ in die folgende:

$$(11.)\quad r_i-(i-1)(2i-3)br_{i-2}=b\left\{a\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}-16\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}\right\},$$

in welcher m nicht mehr vorkommt. Wenn für einen gegebenen Werth von m in dem für $\frac{\partial^m\sqrt{A}}{\partial h^m}$ gefundenen Ausdruck (8.) die Zahlenfactoren $(m)_i$ die ihnen durch die Formel (9.) gegebene Bedeutung haben, und die Funktionen $r_0, r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ so beschaffen sind, dafs zwischen je drei auf einander folgenden die Gleichung (11.) Statt findet, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dafs die $m+1$ ersten Glieder von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ die folgenden sein werden:

$$\sqrt{A^{2m+3}}\{(m+1)_0B^{m+1}+(m+1)_2r_2B^{m-1}A^2+(m+1)_3r_3B^{m-2}A^3+\cdots$$
$$+(m+1)_mr_mBA^m\}.$$

Damit daher das durch die Formel (8.) gegebene Gesetz auch für den nächsten Werth von m gelte und daher allgemein gültig sei, braucht nur gezeigt zu werden, dafs der in dem Ausdrucke von $\frac{\partial^{m+1}\sqrt{A}}{\partial h^{m+1}}$ noch hinzukommende eine Term

$$\sqrt{A^{2m+3}}.(m+1)_{m+1}r_{m+1}A^{m+1}=\sqrt{A^{2m+3}}.r_{m+1}.A^{m+1}$$

dasselbe Gesetz wie die übrigen befolge, oder dafs

$$r_{m+1}=m(2m-1)br_{m-1}+b\left\{a\frac{\partial r_m}{\partial b}-16\frac{\partial r_m}{\partial a}\right\}.$$

Dieser Werth von r_{m+1} ergiebt sich aber vermöge der Formel (5.) durch die Differentiation von (8.). Es sind daher die durch die Induction gefundenen Resultate bewiesen.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man nach und nach die nach k genommenen Differentialquotienten von

$$D = \sqrt{\left(kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b}\sqrt{A^3}.$$

Setzt man

$$\alpha = k'^2 - k^2 = \tfrac{1}{4}a, \quad \beta = \sqrt{kk'} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b},$$

so wird die Formel (5.)

$$(12.) \quad \frac{\partial H}{\partial k} = 2A^3B\frac{\partial H}{\partial A} + 2\beta^4A^3\frac{\partial H}{\partial B} + \alpha\beta A^2\frac{\partial H}{\partial \beta} - 8\beta^4A^2\frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$D = \beta A^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial k} = 3\beta A^{\frac{5}{2}}B + \alpha\beta A^{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial k^2} = 15\beta A^{\frac{7}{2}}B^2 + 10\alpha\beta A^{\frac{9}{2}}B + (\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial k^3} = 105\beta A^{\frac{9}{2}}B^3 + 105\alpha\beta A^{\frac{11}{2}}B^2 + 21(\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{13}{2}}B + (\alpha^3\beta - 6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}$$

u. s. w. u. s. w.

Multiplicirt man diese Ausdrücke der Reihe nach mit

$$x, -\frac{x^3}{\Pi 3}, \quad \frac{x^5}{\Pi 5}, -\frac{x^7}{\Pi 7} \text{ u. s. w.},$$

so erhält man durch die Addition der entstehenden Producte zufolge (3.),

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) = {} & \beta A^{\frac{3}{2}}x\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{\Pi 3}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^3 + \cdots\right\} \\ & - \frac{1}{\Pi 3}\alpha\beta A^{\frac{7}{2}}x^3\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \frac{1}{\Pi 2}\left(\frac{ABx^2}{2}\right)^2 - \cdots\right\} \\ & + \frac{1}{\Pi 5}(\alpha^2\beta - 2\beta^5)A^{\frac{11}{2}}x^5\left\{1 - \frac{ABx^2}{2} + \cdots\right\} \\ & - \frac{1}{\Pi 7}(\alpha^3\beta - 6\alpha\beta^5)A^{\frac{15}{2}}x^7\left\{1 - \cdots\right\} \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

oder

$$(13.) \quad = \sqrt{A}\,e^{-\frac{1}{4}ABx^2}\left\{s_0Ax - s_1\frac{A^3x^3}{\Pi 3} + s_2\frac{A^5x^5}{\Pi 5} - s_3\frac{A^7x^7}{\Pi 7} + \cdots\right\},$$

wo

$$s_0 = \beta, \quad s_1 = \alpha\beta, \quad s_2 = \beta(\alpha^2 - 2\beta^4), \quad s_3 = \alpha\beta(\alpha^2 - 6\beta^4), \quad \text{etc.}$$

Man wird hierdurch auf den folgenden allgemeinen Ausdruck von $\frac{\partial^m D}{\partial h^m}$ geführt,

$$(14.) \quad \frac{\partial^m D}{\partial h^m} = \sqrt{A^{2m+3}}\{[m]_0 s_0 B^m + [m]_1 s_1 B^{m-1} A + [m]_2 s_2 B^{m-2} A_2 + \cdots + [m]_m s_m A_m\},$$

wo

$$(15.) \quad [m]_i = \frac{\Pi(2m+1)}{2^{m-i}\Pi(m-i)\Pi(2i+1)} = (2i+3)(2i+5)\ldots(2m+1)\frac{m.m-1\ldots m-i+1}{1.2\ldots i}.$$

Durch Differentiation von (14.) ergiebt sich vermöge (12.) zwischen den drei auf einander folgenden Funktionen s_{m-1}, s_m, s_{m+1} die Gleichung

$$(16.) \quad s_{m+1} = 2m(2m+1)\beta^4 s_{m-1} + \alpha\beta\frac{\partial s_m}{\partial\beta} - 8\beta^4\frac{\partial s_m}{\partial\alpha}.$$

Man kann diese Induction ganz auf dieselbe Art, wie im Vorhergehenden, zur allgemeinen Gültigkeit erheben. Es wird aber um so mehr genügen, dieses in dem vorigen Beispiel ausgeführt zu haben, als man auf folgende Art unmittelbar zu den gefundenen Gesetzen gelangen kann.

Es sei nämlich

$$u = Ax$$

und

$$(17.) \quad \vartheta(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U,$$

so wird, wenn man $\vartheta(x)$ als Funktion von x und h, aber U als Funktion von u und h ansieht

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial x} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{A\frac{\partial U}{\partial u} - BuU\right\},$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} - 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + (B^2u^2 - AB)U\right\}.$$

Man erhält ferner zufolge der oben gegebenen Formeln,

$$\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial h} = \sqrt{A^3}B, \quad \frac{\partial . AB}{\partial h} = 2A^2B^2 + bA^4,$$

und daher

$$\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left\{(AB - B^2u^2 - \tfrac{1}{2}bA^2u^2)U + 2ABu\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial h}\right\}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial\vartheta(x)}{\partial h} = 0$$

in die folgende

$$A^2\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial U}{\partial h}=-\tfrac{1}{2}bA^2u^2U.$$

Führt man statt der Gröfse h die Gröfse a ein, so dafs U als Funktion von u und a angesehen wird, so erhält man, da zufolge (4.)

$$da=-16bA^2dh,$$

nach Division durch A^2,

$$(18.)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}-16b\frac{\partial U}{\partial a}=\tfrac{1}{2}bu^2U.$$

Da die Funktion U sich in eine nach den ganzen Potenzen von u^2 aufsteigende Reihe entwickeln läfst, deren erster Term 1 ist, so setze man

$$(19.)\qquad U=1-r_1\frac{u^2}{\Pi 2}+r_2\frac{u^4}{\Pi 4}-r_3\frac{u^6}{\Pi 6}+\cdots$$

Substituirt man diese Reihe in die für U gefundene partielle Differentialgleichung (18.), so erhält man

$$r_1=0$$

und allgemein

$$(20.)\qquad r_i+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}=(i-1)(2i-3)br_{i-2}.$$

Die Gröfsen a und b sind mit einander durch die Formel

$$a^2=16(1-2b)$$

verbunden, aus welcher

$$16\frac{\partial b}{\partial a}=-a$$

folgt. Es ist von Vortheil die Funktion r als homogene Funktion von a^2 und b auszudrücken. Man hat dann in der vorstehenden Gleichung für $16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}$ zu setzen

$$16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}-ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b},$$

wodurch sich dieselbe in die oben gefundene Gleichung

$$(21.)\qquad r_i+16b\frac{\partial r_{i-1}}{\partial a}-ab\frac{\partial r_{i-1}}{\partial b}=(i-1)(2i-3)br_{i-2}$$

verwandelt.

Mittelst dieser Gleichung erhält man aus dem Werthe der ersten Funktion $r_0=1$ den Werth $r_1=0$ und hieraus nach und nach die übrigen. Durch dieselbe Gleichung wird zugleich gezeigt, *dafs, wenn man für ein nicht*

negatives i

$$r_{2i+2} = bf_i(a^2, b), \qquad r_{2i+3} = ab\varphi_i(a^2, b)$$

setzt, die Funktionen f_i, φ_i ganze homogene Funktionen von a^2 und b vom i^{ten} Grade, und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.

Setzt man wieder $Ax = u$ und

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}U_1,$$

und sieht wieder $\vartheta_1(x)$ als Funktion von x und h aber U_1 als Funktion von u und a an, so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$(22.) \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} - 16b\frac{\partial U_1}{\partial a} = \tfrac{1}{2}bu^2U_1.$$

Da die Funktion U_1, nach den ganzen positiven Potenzen von x oder von u entwickelt, nur die ungeraden Potenzen der Variablen enthält, so kann man

$$(23.) \qquad U_1 = s_0u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3\frac{u^7}{\Pi 7} + \text{etc.}$$

setzen.

Der Werth des ersten Coefficienten s_0 wird der Werth von $\frac{\partial U_1}{\partial a}$ für $u = 0$ oder der Werth von $\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\sqrt{A^3}\partial x}$, welcher

$$\beta = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b} = s_0$$

ist. Substituirt man die Reihe (23.) in die partielle Differentialgleichung (22.), so erhält man

$$(24.) \qquad s_i + 16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a} = (i-1)(2i-1)bs_{i-2},$$

oder wenn man s als Funktion von a und b betrachtet,

$$(25.) \qquad s_i + 16b\frac{\partial s_{i-1}}{\partial a} - ab\frac{\partial s_{i-1}}{\partial b} = (i-1)(2i-1)bs_{i-2}.$$

Setzt man, wie oben

$$a = 4\alpha, \qquad b = 2\beta^4,$$

so erhält man hieraus die Gleichung

$$(26.) \qquad s_i + 8\beta^4\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \alpha} - \alpha\beta\frac{\partial s_{i-1}}{\partial \beta} = 2(i-1)(2i-1)\beta^4 s_{i-2},$$

welche mit der Gleichung (16.) übereinkommt, wenn man $i = m+1$ setzt. Mittelst der Gleichung (26.) kann man aus dem Werthe der ersten Funktion $s_0 = \beta$ nach und nach die übrigen erhalten. Durch dieselbe Gleichung wird leicht gezeigt, *dafs, wenn man*

$$s_{2i} = \beta f_i'(\alpha^2, \beta^4), \qquad s_{2i+1} = \alpha\beta\varphi_i'(\alpha^2, \beta^4)$$

setzt, die Funktionen f_i' und φ_i' ganze homogene Funktionen von α^2 und β^4 vom i^{ten} Grade und deren Zahlenfactoren ganze Zahlen sind.

Die Funktionen r_{2i+2}, r_{2i+3}, s_{2i}, s_{2i+1} werden daher nur aus $i+1$ Termen bestehen, welche in möglichst kleine ganze Zahlen *) multiplicirt sind. Da diese algebraischen Funktionen sehr merkwürdige Eigenschaften besitzen und auf dieselben gleichsam als Elemente viele andere Bestimmungen zurückgeführt werden, so ist es von Wichtigkeit, ihre einfachsten Ausdrücke aufzustellen, wie es hier durch Einführung der Gröfsen a und b, oder α und β geschehen ist. Je nachdem man den Gröfsen a und b die Werthe

$$a = 4(k'^2-k^2), \qquad b = 2k^2k'^2;$$
$$a = -4\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad b = -\frac{2k'^2}{k^4};$$
$$a = 4\frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad b = -\frac{2k^2}{k'^4};$$

oder den Gröfsen α und β die Werthe

$$\alpha = k'^2-k^2, \qquad \beta = \sqrt{(kk')};$$
$$\alpha = -\frac{1+k'^2}{k^2}, \qquad \beta = \sqrt[4]{-1}\cdot\frac{\sqrt{k'}}{k};$$
$$\alpha = \frac{1+k^2}{k'^2}, \qquad \beta = \sqrt[4]{-1}\cdot\frac{\sqrt{k}}{k'}$$

giebt, will ich die Funktionen r_i und s_i mit r_i, $\frac{r_i'}{k^{2i}}$, $\frac{r_i''}{k'^{2i}}$ und s_i, $\sqrt[4]{-1}\frac{s_i'}{k^{2i+1}}$, $\sqrt[4]{-1}\frac{s_i''}{k'^{2i+1}}$ bezeichnen.

Hiernach wird für ein nicht negatives i:

$$r_{2i+2} = 2k^2k'^2 f_i(16(k'^2-k^2)^2, 2k^2k'^2),$$
$$r_{2i+3} = 8k^2k'^2(k'^2-k^2)\varphi_i(16(k'^2-k^2), 2k^2k'^2);$$
$$r'_{2i+2} = -2k'^2 f_i(16(1+k'^2)^2, -2k'^2),$$
$$r'_{2i+3} = 8k'^2(1+k'^2)\varphi_i(16(1+k'^2)^2, -2k'^2);$$
$$r''_{2i+2} = -2k^2 f_i(16(1+k^2)^2, -2k^2),$$
$$r''_{2i+3} = -8k^2(1+k^2)\varphi_i(16(1+k^2)^2, -2k^2);$$

*) Diese Bemerkung bezieht sich jedenfalls auf die niedrigen Werthe der Zahlencoefficienten im Vergleich zu anderen Formen der Darstellung. Wenn man die Funktionen r und s z. B. nach Potenzen von k ordnet, so wird man auf höhere Zahlencoefficienten geführt. *B.*

$$
\begin{aligned}
s_{2i} &= \sqrt{kk'}\, f_i'((k'^2-k^2)^2, k^2k'^2),\\
s_{2i+1} &= \sqrt{kk'}\,(k'^2-k^2)\,\varphi_i'((k'^2-k^2)^2, k^2k'^2);\\
s'_{2i} &= \sqrt{k'}\, f_i'((1+k'^2)^2, -k'^2),\\
s'_{2i+1} &= -\sqrt{k'}\,(1+k'^2)\,\varphi_i'((1+k'^2)^2, -k'^2);\\
s''_{2i} &= \sqrt{k}\, f_i'((1+k^2)^2, -k^2),\\
s''_{2i+1} &= \sqrt{k}\,(1+k^2)\,\varphi_i'((1+k^2)^2, -k^2).
\end{aligned}
$$

In diesen Ausdrücken bedeuten f_i, φ_i, f_i', φ_i' jede immer dieselben Funktionen der verschiedenen unter dem Funktionenzeichen befindlichen Gröfsen, und zwar homogene Ausdrücke derselben vom i^{ten} Grade, deren Zahlencoefficienten ganze Zahlen sind.

Setzt man $\qquad \dfrac{2Kx}{\pi} = u,$

und giebt zufolge des obigen Satzes je nach den dreierlei Bestimmungen von a und b der Gröfse A die Werthe

$$\frac{2K}{\pi}, \qquad \frac{2kK}{\pi}, \qquad \frac{2k'K}{\pi},$$

und der Gröfse B die Werthe

$$\frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}, \qquad \frac{1}{k}\frac{2E}{\pi}, \qquad \frac{1}{k'}\left(\frac{2E}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\right),$$

so erhält man aus der einen Formel (6.) die nachfolgenden Darstellungen der drei Funktionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3(x) = \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right) &= \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)u^2}\left(1 + r_2\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3\frac{u^6}{\Pi 6} + r_4\frac{u^8}{\Pi 8} - \cdots\right),\\
\vartheta_2(x) = \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right) &= \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(1 + r_2'\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3'\frac{u^6}{\Pi 6} + r_4'\frac{u^8}{\Pi 8} - \cdots\right),\\
\vartheta(x) = \vartheta\left(\frac{\pi u}{2K}\right) &= \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(1 + r_2''\frac{u^4}{\Pi 4} - r_3''\frac{u^6}{\Pi 6} + r_4''\frac{u^8}{\Pi 8} - \cdots\right).
\end{aligned}
$$

Ferner erhält man für die Funktion $\vartheta_1 x$ aus der einen Formel (13.) die drei verschiedenen Darstellungen:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(x) = \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right) &= \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)u^2}\left(s_0 u - s_1\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3\frac{u^7}{\Pi 7} + \cdots\right)\\
&= \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, e^{-\frac{Eu^2}{2K}}\left(s_0' u - s_1'\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2'\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3'\frac{u^7}{\Pi 7} + \cdots\right)\\
&= \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{K}-1\right)u^2}\left(s_0'' u - s_1''\frac{u^3}{\Pi 3} + s_2''\frac{u^5}{\Pi 5} - s_3''\frac{u^7}{\Pi 7} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

Die Gröfse u hat hier nicht die dreifache Bedeutung, welche in den früheren Formeln ihr Werth Ax je nach den drei Werthen von A erhielt, sondern nur diejenige, welche dem ersten Werthe $A = \dfrac{2K}{\pi}$ entspricht.

7.

Über die Substitution

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$$

und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *F. Richelot*.)

Die allgemeinste Relation zwischen zwei Variabeln, in welcher keine den zweiten Grad übersteigt, ist

$$(1.)\quad (ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+(a''x^2+2b''x+c'')$$
$$=(ay^2+2a'y+a'')x^2+2(by^2+2b'y+b'')x+(cy^2+2c'y+c'')=0.$$

Es folgen aus ihr die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} (ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c' \\ =\sqrt{\{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')\}}, \\ (ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b'' \\ =\sqrt{\{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')\}}, \end{cases}$$

ferner hat man durch ihre Differentiation

$$\{(ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b''\}dx$$
$$+\{(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c'\}dy=0,$$

und daher die Differentialgleichung

$$(3.)\quad \frac{dx}{\sqrt{\{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')\}}}$$
$$+\frac{dy}{\sqrt{\{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')\}}}=0.$$

*) Ich habe mir erlaubt, den Zusatz „und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform" zu dem von *Jacobi* gegebenen Titel dieser Note zu machen, weil darin in der That das Princip zur Reduction eines beliebigen solchen Integrals, welches *Jacobi* in seinem Aufsatz *Abel*sches Integral erster Klasse nennt, enthalten ist. Andrerseits behalte ich mir vor, eine längst vollendete Arbeit von mir, worin diese vollständige Reduction in den 3 Fällen von einem, zwei oder drei Paaren imaginärer conjugirter Faktoren des Ausdrucks geleistet wird, so bald als möglich bekannt zu machen. *R.*

Ich werde die beiden Functionen unter den Wurzelzeichen mit

$$(4.)\quad \begin{cases} X = (a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''), \\ Y = (by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'') \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichungen (2.) zeigen, dafs die zwischen den Gröfsen x und y aufgestellte Relation von der Beschaffenheit ist, *dafs wenn für einen reellen Werth von x auch $\sqrt{X}$ reell ist, zugleich y und $\sqrt{Y}$, und umgekehrt, wenn für einen reellen Werth von y auch $\sqrt{Y}$ reell ist, zugleich x und $\sqrt{X}$ reell werden.* Wenn man daher die Gleichung (1.) zur Transformation von Integralausdrücken $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{X}}$ benutzt, in welchen P eine rationale Function von x ist, so wird, wofern nur der vorgelegte Ausdruck während der Integration reell bleibt, immer auch der transformirte Ausdruck reell bleiben, so dafs es keiner weiteren Discussion der Grenzen bedarf. Da in den Formeln (2.) in Bezug auf die Coefficienten a, b, etc. keine Wurzelausziehung stattfindet, so kann man von diesen Formeln eine Anwendung auf die Zahlentheorie machen, indem man annimmt, dafs a, b etc. ganze Zahlen sind. Man erhält dann den Satz,

dafs wenn für einen rationalen Werth von x der Ausdruck

$$(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

ein Quadrat wird, man immer auch die Function

$$(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')$$

durch einen rationalen Werth von y zu einem Quadrat machen kann.

In dem besondern Falle, wenn $a'=b'=c'=0$, erhält man hieraus den Satz:

Wenn eine Function 4ter Ordnung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, zu einem Quadrat gemacht werden soll, so kann man für den Fall, wenn die Function in zwei rationale Factoren zerfällt ist, die Aufgabe immer auf den Fall zurückführen, in welchem die ungeraden Potenzen fehlen.

Man kann nämlich von den beiden Ausdrücken

$$-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

und

$$(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')$$

den einen immer zu einem Quadrat machen, wenn man den andern zu einem Quadrat machen kann. Dieser Satz entspricht der Reduction des Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')}}$$

auf die Form

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')\}}},$$

welche ***Legendre*** durch die Substitution

$$y^2 = -\frac{a''x^2+2b''x+c''}{ax^2+2bx+c}$$

bewerkstelligt, die für den Fall, wo $a'=b'=c'=0$, aus (1.) folgt. Setzt man noch $b=b''=0$, so werden die beiden Ausdrücke, die auf einander reducirt werden können,

$$-(ax^2+c)(a''x^2+c'') \quad \text{und} \quad -(ay^2+a'')(cy^2+c'');$$

die Gleichungen (2.) zeigen nämlich, dafs y und $\sqrt{Y}$ immer rational durch x und $\sqrt{X}$ ausgedrückt werden kann, und umgekehrt.

Euler hat nur den Fall betrachtet, wenn die Functionen X und Y dieselben Functionen respective von x und y sind, oder wenn man

$$a'=b, \qquad a''=c, \qquad b''=c'$$

hat, und hieraus seine berühmten Additionstheoreme für die elliptischen Integrale der drei Gattungen abgeleitet, ohne dafs er dazu der Reductionen auf die jetzt übliche Form dieser Integrale bedurfte. Die allgemeinere Form hat ***Lagrange*** in den ***Turiner Memoiren*** von 1784 und 1785 aufgestellt. Da dort aber nicht aller Nutzen aus der Substitution (1.) gezogen ist, welchen man aus derselben ziehen kann, so will ich noch einige Bemerkungen über die Anwendungen, welche man von dieser Substitution machen kann, hinzufügen.

Da durch die Function X die drei Trinome

$$ax^2+2bx+c, \qquad a'x^2+2b'x+c', \qquad a''x^2+2b''x+c''$$

nicht vollkommen bestimmt sind, so kann man die willkührlich bleibenden Bestimmungen dazu benutzen, ***dafs in Y die ungeraden Potenzen fortfallen,*** wie wenn man, was erlaubt ist,

$$a'=b'=c'=0$$

setzt, oder auch dazu, ***dafs der erste und letzte Term von Y gleichzeitig verschwindet.*** Setzt man im zweiten Falle $y=z^2$, so erhält das Resultat dieselbe Form, wie im ersten Falle. ***Die Vergleichung dieser beiden Resultate giebt die Transformation.*** Nimmt man an, dafs in dem Ausdrucke von X bereits die ungeraden Potenzen fehlen, und schafft man den ersten und letzten Term fort, indem dagegen wieder die ungeraden Potenzen eingeführt werden, so erhält man die Transformation sogleich in der reducirten

Form selbst. ***Euler*** hat diese beiden Wege zur Reduction des Integrals, die directe Fortschaffung der ungeraden Potenzen und die Fortschaffung des ersten und letzten Terms und nachherige Einführung des Quadrats einer neuen Variabeln angegeben, und er mufste hierdurch auf die Transformation kommen, wenn er sich nur die Aufgabe gestellt hätte. Dieselbe Idee ist für mich leitend gewesen, als ich die Transformation der ***Abel***schen Integrale suchte. Denn durch eine Substitution von der Form

$$x = \frac{m+ny}{1+y}$$

kann man das Integral

$$\int \frac{(fx+g)\,dx}{\sqrt{(\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\varepsilon x^2+\zeta x+\eta)}},$$

wenn man die Function unter dem Wurzelzeichen in zwei Factoren der 4ten und 2ten Ordnung zerfällt, in die Form

$$\int \frac{(f'y+g')\,dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}\sqrt{(ay^2+2by+c)}}$$

bringen, und durch eine ähnliche Substitution, in der man aber die neuen Variabeln als Quadrate einführt

$$x = \frac{p+qz^2}{1+z^2},$$

kann man dasselbe Integral in die Form

$$\int \frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{(\alpha'' z^6+\beta'' z^4+\gamma'' z^4+\delta'' z^2+\varepsilon'')}}$$

bringen. Gelingt es nun durch Substitution einer rationalen Function von t^2 für y^2 die Differentialausdrücke

$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} - \frac{(f'y-g')dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}},$$
$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} + \frac{(f'y-g')dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}},$$

so zu transformiren, dafs die ungeraden Potenzen herausgehen, und dadurch die erste Form des reducirten Integrals in Integrale von der Form

$$\int \frac{(f'''t^2+g''')dt}{\sqrt{(\alpha''' t^6+\beta''' t^4+\gamma''' t^4+\delta''' t^2+\varepsilon''')}}$$

zu verwandeln, so war ich gewifs durch Vergleichung der beiden auf verschiedenem Wege erhaltenen Reductionen eine Transformation des ***Abel***schen Integrals zu erhalten, ähnlich der ***Landen***schen für die elliptischen Integrale.

Wenn man für den Zähler $f'y+g'$ die Gröfse $ay+b$ setzt, so wird der zu transformirende Ausdruck das Differential einer Gröfse

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} - \sqrt{(ay^2-2by+c)},$$

und man sieht leicht, dafs y^2 eine rationale Function von t^2 wird. Man erhält nämlich nach einander die Formeln

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$
$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2 = 0$$

und daher

$$y^2 = t^2\cdot\frac{c-t^2}{b^2-at^2}.$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$(5.)\quad \frac{dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{ay+b}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}-\frac{ay-b}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}$$
$$= \frac{2dt}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}} = \frac{2(b^2-at^2)\,dt}{\sqrt{\{\alpha't^4(t^2-c)^2+\beta't^2(t^2-c)(at^2-b^2)+\gamma'(at^2-b^2)^2\}}},$$

welches ein Ausdruck von der verlangten Form ist. Es ergiebt sich aber eine ähnliche Formel für jeden Zähler $fy+g$.

Es ist nämlich

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}}{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}} = \frac{t^2}{by},$$

und daher

$$2b\,dt = -aby\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}$$
$$+b^2\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}$$
$$= (b^2-at^2)\left\{\frac{dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}.$$

Man erhält hieraus

$$\frac{dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}} = \frac{2b\,dt}{b^2-at^2},$$
$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} = \frac{2t^2dt}{b^2-at^2}.$$

Bezeichnet man daher in (5.) die gerade Funktion der 8ten Ordnung von t, die sich unter dem Wurzelzeichen befindet, mit T, so dafs

$$\sqrt{T} = (b^2-at^2)\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')},$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}=\frac{2b\,dt}{\sqrt{T}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}=\frac{2t^2dt}{\sqrt{T}}.$$

Setzt man

$$2t'=\sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2-2by+c)},$$

so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}=\frac{2b\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}=\frac{2t'^2dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo T' dieselbe Function von t' wie T von t ist.

Die Combination beider Substitutionen giebt

$$\frac{(f'y+g')\,dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}\sqrt{(ay^2+2by+c)}}=\frac{(bg'-f't^2)\,dt}{\sqrt{T}}-\frac{(bg'-f't'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}}.$$

Der oben gefundene Differentialausdruck

$$\frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{Z}},$$

wo Z eine ganze Funktion 8ter Ordnung von z ist, wird auf diese Weise gleich dem Aggregat zweier Ausdrücke von ähnlicher Form gefunden,

$$\frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{Z}}=\frac{(bg'-f't^2)\,dt}{\sqrt{T}}-\frac{(bg'-f't'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

und diese Vergleichung der auf doppeltem Wege erhaltenen Reductionen ist es, wodurch sich eine Transformation der *Abel*schen Integrale ergiebt, welche die den elliptischen Integralen zunächst stehende Gattung bilden.

Da die weitere Ausbildung der hier angegebenen Substitution bei der grofsen Complication des Gegenstandes eine anhaltende Beschäftigung erforderte, zu welcher mir selbst mehrere andere Arbeiten nicht die gehörige Mufse gewährten, so hatte ich die glückliche Idee, dieselbe meinem Schüler und Freunde, Herrn Prof. *Richelot* zu übergeben, unter dessen Händen sie dieselbe Vollendung erhielt, welche die *Landen*sche Substitution durch *Lagrange* und *Legendre* erlangt hat. (S. Bd. XVI, S. 224 des *Crelle*schen Journals.)

Man kann die gefundene Transformation nach zwei Seiten auszudehnen unternehmen, indem man entweder für die nächst höheren *Abel*schen Integrale eine ähnliche Transformation, oder auch für dieselben Integrale noch andere

von der gefundenen wesentlich verschiedene Transformationen sucht. Da aber bisher noch Niemand solche Ausdehnung geleistet hat, so habe ich, um dadurch vielleicht zu der Lösung dieser Probleme etwas beitragen zu können, den anfänglichen Weg, der zu der gefundenen Transformation geleitet, genauer angegeben.

Die Relation zwischen y und t^2, welche die verlangte Transformation bewerkstelligt hat, ist ebenfalls in der oben aufgestellten Grundgleichung enthalten; und kann daher auch nach der im Anfange angegebenen Methode aus ihr die Differentialgleichung abgeleitet werden. Es ist nämlich diese Relation vollständig entwickelt,

$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2 = (b^2-at^2)y^2+t^4-ct^2 = 0,$$

woraus

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}}} = \frac{d.t^2}{2\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}.$$

Durch Auflösung der Gleichung folgt

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$
$$\frac{2b^2y^2}{t^2} = ay^2+c+\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$

und daher

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)},$$
$$\frac{2by}{t} = \sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2-2by+c)}.$$

Es ist ferner

$$(b^2-at^2)y = \sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}.$$

Multiplicirt man die vorstehende Differentialgleichung mit

$$y\{\sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)}\} = \frac{2t\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}{b^2-at^2},$$
$$\sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2+2by+c)} = \frac{2b\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}{t(b^2-at^2)},$$

so erhält man

$$y\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\} = \frac{2t^2dt}{b^2-at^2},$$
$$dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\} = \frac{2bdt}{b^2-at^2},$$

welches die zuvor gefundenen Gleichungen sind.

In dem 12ten Bande des *Crelle*schen Journals S. 182 ff. hat Herr Prof. *Richelot* das *Abel*sche Integral, wenn die Gröfse unter dem Wurzelzeichen lauter

reelle lineäre Factoren hat, auf die Form

$$\int \frac{(f+g\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)\}}},$$

zurückgeführt, wo $\varkappa$, λ, μ kleiner als 1 sind. Ich will jetzt zeigen, wie man durch die von mir gegebene Substitution die übrigen Fälle erledigt.

Es sei das vorgelegte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} \cdot \frac{m+nx}{\sqrt{(x^2-2\alpha x+\beta)}},$$

wo $x^2-2\alpha x+\beta$ nicht in zwei reelle lineäre Factoren zerlegt werden kann. Dieser Fall umfafst alle übrigen, in welchen die 6 lineären Factoren nicht alle reell sind. Durch eine lineäre Substitution

$$x = \frac{p+qy}{1+y},$$

wo p und q reell sind, kann man immer, wie ***Legendre*** gezeigt hat, den Differentialausdruck

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}$$

in den einfacheren

$$\frac{dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}}$$

transformiren, wo f, g, f', g' reell sind. Es wird dadurch das vorgelegte Integral die Form

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}} \cdot \frac{h+iy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}$$

erhalten, wo $ay^2+2by+c$ ebenfalls nicht in reelle Factoren zerlegt werden kann oder

$$ac > b^2,$$

und wo ich, was erlaubt ist, a und c positiv annehme.

Durch die Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} - \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$
$$2t' = \sqrt{(ay^2+2by+c)} + \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

erhielten wir oben

$$\frac{(h+iy)\,dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}\sqrt{(ay^2+2by+c)}} = \frac{(bh-it^2)\,dt}{\sqrt{T}} - \frac{(bh-it'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo

$$\sqrt{T} = (b^2-at)\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}$$

und T' dieselbe Funktion von t' wie T von t ist.

Dieselbe Substitution ergab

$$(6.) \quad y^2 = \frac{ct^2 - t^4}{b^2 - at^2},$$

woraus

$$T = (fb^2 + (gc - fa)t^2 - gt^4)(f'b^2 + (g'c - f'a)t^2 - g't^4).$$

Es sind aber die Gröfsen

$$(gc - fa)^2 + 4fgb^2 = (gc + fa)^2 - 4fg(ac - b^2),$$
$$(g'c - f'a)^2 + 4f'g'b^2 = (g'c + f'a)^2 - 4f'g'(ac - b^2)$$

immer positiv, sowohl für positive als negative Werthe von fg und $f'g'$, woraus folgt, dafs in den transformirten Integralen die Gröfse T unter dem Wurzelzeichen das Product von vier reellen, in Bezug auf t^2 lineären Factoren ist. Es hat aber keine weitere Schwierigkeit, solche Integrale in die von Herrn Prof. *Richelot* als die kanonische gewählte Form zu bringen, wie man in der angeführten Abhandlung im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals sehen kann, wo alle hiebei vorkommenden Fälle umständlich discutirt sind. Setzt man für t^2 eine neue Variable, so sieht man, dafs das *Abel*sche Integral, in welchem die Function unter dem Wurzelzeichen auf die 6te Ordnung steigt, immer in andere transformirt werden kann, in denen der erste und letzte Term dieser Function fehlt und alle ihre lineären Factoren reell sind.

Herr Prof. *Richelot* hat die Reduction auf seine kanonische Form in dem Fall, wo die lineären Factoren der Function unter dem Wurzelzeichen alle reell sind, nicht blofs für die *erste Classe* der *Abel*schen Integrale, d. h. diejenigen, in welchen die Function unter dem Wurzelzeichen auf den 6ten Grad steigt, bewerkstelligt, sondern gezeigt, dafs in diesem Falle dasselbe Verfahren angewandt werden kann, auf welchen Grad auch die unter dem Wurzelzeichen befindliche Function steigt. Aber für die *Abel*schen Integrale, in welchen diese Funktion den 6ten Grad übersteigt, hat man noch keine Substitution aufgefunden, durch welche die Reduction in den übrigen Fällen, wo mehrere der lineären Factoren oder alle imaginär sind, geleistet werden könnte. Dafs man bei der ersten Classe der *Abel*schen Integrale durch eine Substitution die Reduction in Fällen bewirken konnte, welche sich einer andern entzogen, liefs im Voraus erkennen, dafs ihre Anwendung auf die bereits reducirte Form nicht wieder auf dieselbe reducirte Form zurück, sondern auf eine transformirte führen würde. So wird man bei den Untersuchungen über die höheren Classen der *Abel*schen Integrale gewifs sein können, dafs die Substitution, mittelst welcher man die Reduction in dem Falle, wo die

Function unter dem Wurzelzeichen nicht lauter reelle Factoren hat, bewerkstelligen kann, zugleich eine Transformation geben wird.

Ich habe oben bei Anwendung der Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} \mp \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

vorausgesetzt, dafs die Funktion 6ten Grades unter dem Wurzelzeichen wenigstens *einen* trinomischen Factor hat, der sich nicht in reelle lineäre Factoren auflösen läfst. Wäre diese Bedingung nothwendig, so würde man das von mir vorgeschlagene Verfahren nicht auf das bereits reducirte Integral

$$\int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{\{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)\}}}$$

anwenden können, ohne dafs die erhaltene Transformation auf imaginäre Argumente führt. Auch ist in der That Herr Prof. *Richelot* auf imaginäre Argumente gekommen *), und hat dieselben durch das *Abel*sche Additionstheorem auf reelle Argumente zurückgeführt. (S. den 16ten Band des *Crelle*schen Journals S. 224.) Ich will aber zeigen, dafs dies immer vermieden werden kann.

---

*) Man gelangt nur auf imaginäre Argumente, wenn man bei dieser Substitution *Jacobi*'s von der Unterscheidung der Bedingungen

$$x\lambda \gtrless \mu$$

abstrahirt, und solche Werthe des Arguments γ annimmt, wofür die beiden neuen Argumente t und t' in *einem* und demselben Intervall des Ausdrucks Ft liegen. Beide Rücksichten sind in dieser *Jacobi*schen Umformung nicht beobachtet worden. Er scheint entweder nur beabsichtigt zu haben, zu zeigen, wie seine Formel auch im Fall von lauter reellen Factoren unter dem gegebenen Wurzelzeichen eine einmalige Reduction in reeller Form mit sich führe, oder hat diese Note später noch fortsetzen wollen. Da meine Transformation der *Abel*schen Integrale erster Ordnung nicht nur von jeder Bedingung zwischen den 3 Moduln unabhängig ist, sondern, was ihre Haupteigenschaft ist, bei ihrer weitern Anwendung nicht auf die gegebenen Integrale zurück-, sondern auf Integrale mit successive kleiner oder gröfser werdenden Moduln führt, so ist sie von der obigen, welche schon bei der ersten Wiederholung auf das gegebene Integral zurückführt, wesentlich verschieden. Wenn man diese letztere in die Normalform überträgt, so erhält man für $x\lambda > \mu$ die Gleichungen

$$\frac{(1+\mu\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\Delta\xi)}} = C\left\{\frac{(1-c^2x_1)\,dx_1}{\sqrt{(Dx_1)}} - \frac{(1-c^2x_2)\,dx_2}{\sqrt{(Dx_2)}}\right\},$$

$$\frac{(1-\mu\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\Delta\xi)}} = L\left\{\frac{(1-l^2x_1)\,dx_1}{\sqrt{(Dx_1)}} - \frac{(1-l^2x_2)\,dx_2}{\sqrt{(Dx_2)}}\right\},$$

worin:

$$m = \frac{\varkappa\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - \lambda\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{\varkappa\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + \lambda\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

$$l^2 = m\frac{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + (\lambda^2-\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - (\lambda^2-\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

$$c^2 = m\frac{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + (\lambda^2+\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - (\lambda^2+\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

Es sei das Integral

$$J = \int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{\{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)\}}}$$

vorgelegt, wo man $\varkappa$, λ, μ reell und positiv und $1 > \varkappa > \lambda > \mu$, ferner x zwischen 0 und 1 annimmt. Setzt man

$$x = \frac{y-1}{\mu(y+1)},$$

so wird

$$1-x = \frac{1+\mu-(1-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\mu^2 x = \frac{1+\mu+(1-\mu)y}{y+1},$$

$$1-\varkappa^2 x = \frac{\varkappa^2+\mu-(\varkappa^2-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\lambda^2 x = \frac{\lambda^2+\mu-(\lambda^2-\mu)y}{\mu(y+1)},$$

$$dx = \frac{2}{\mu}\cdot\frac{dy}{(y+1)^2},$$

und daher

$$J = h\int \frac{\{(f\mu+g)y+(f\mu-g)\}\,dy}{\sqrt{\{(y^2-1)(1-\nu^2y^2)(1+my)(1+ny)\}}},$$

wo

$$h = \frac{2}{(1+\mu)\sqrt{(\varkappa^2+\mu)}\sqrt{(\lambda^2+\mu)}}, \qquad \nu = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \qquad m = \frac{\varkappa^2-\mu}{\varkappa^2+\mu}, \qquad n = \frac{\lambda^2-\mu}{\lambda^2+\mu},$$

und y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$ ist. Die Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} \mp \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

bleibt immer reell, wenn in den Intervallen, in welchen sich y während der

---

$$(1-m^2)\frac{c\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-l^2)\}}+l\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-c^2)\}}}{\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-l^2)\}}+\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-c^2)\}}}$$
$$= 2C\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-c^2)\}} = -2L\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-l^2)\}},$$
$$\Delta\xi = (1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)(1-\mu^2\xi^2),$$
$$Dx = (1-x^2)(1-c^2x^2)(1-l^2x^2)(1-m^2x^2)$$

gesetzt ist, und die beiden Argumente x_1 und x_2 aus dem gegebenen Argument ξ vermittelst der Gleichungen:

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_1}{1-l^2x_1}\right)\right\}} = \frac{\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)\}}-\mu\sqrt{\{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)\}}}{\sqrt{\{(\varkappa^2\lambda^2-\mu^2)(1-\mu\xi^2)\}}},$$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_2}{1-l^2x_2}\right)\right\}} = \frac{\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)\}}+\mu\sqrt{\{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)\}}}{\sqrt{\{(\varkappa^2\lambda^2-\mu^2)(1-\mu\xi^2)\}}}$$

abgeleitet sind.

In dieser Form kann man sich auch durch Rechnung davon überzeugen, dafs die vorliegende Umformung von der oben bezeichneten reciproken Natur ist, und daher weiter angewendet auf das ursprünglich gegebene Integral zurückführt. So sind auch die drei Moduln c, l, m eben solche Functionen der drei Moduln $\varkappa$, λ, μ, wie umgekehrt diese es von jenen sind. — Gelegentlich werde ich diesen Gegenstand ausführlicher verfolgen. — *R.*

Integration befindet, nicht blofs die Gröfse $ay^2+2by+c$, sondern auch die Gröfse $ay^2-2by+c$ positiv ist. Für den hier betrachteten Fall ist

$$ay^2+2by+c = (1+my)(1+ny)$$

und y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$. Es sind aber die absoluten Werthe von m und n kleiner als ν, und daher die vier Gröfsen $1\pm\frac{m}{\nu}$, $1\pm\frac{n}{\nu}$ immer positiv, so dafs die Gröfsen $(1+my)(1+ny)$ und $(1-my)(1-ny)$, wenn y von 1 bis $\frac{1}{\nu}$ wächst, positiv bleiben, wodurch der geforderten Bedingung Genüge geschieht.

Ich setze jetzt zufolge der angewandten Substitution

$$\pm 2t = \sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}} - \sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}},$$
$$2t' = \sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}} + \sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m+n$ positiv oder negativ ist oder, was dasselbe ist, je nachdem $x\lambda > \mu$ oder $x\lambda < \mu$. Die Quadratwurzeln werde ich immer positiv nehmen.

Setzt man der Kürze halber

$$1-x^2 = x'^2, \qquad 1-\lambda^2 = \lambda'^2, \qquad 1-\mu^2 = \mu'^2,$$
$$x^2-\lambda^2 = \lambda''^2, \qquad x^2-\mu^2 = \mu''^2, \qquad \lambda^2-\mu^2 = \mu'''^2,$$
$$N = \sqrt{\{(x^2+\mu)(\lambda^2+\mu)\}},$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{\{(x\lambda-\mu)^2\}}}{N}, \qquad \alpha' = \frac{x\lambda+\mu}{N},$$
$$\beta = \frac{\sqrt{\{(\mu''\mu'''-\mu x'\lambda')^2\}}}{(1-\mu)N}, \qquad \beta' = \frac{\mu''\mu'''+\mu x'\lambda'}{(1-\mu)N},$$

so wird gleichzeitig

$$y = 1, \qquad t = \alpha, \qquad t' = \alpha',$$

und

$$y = \frac{1}{\nu}, \qquad t = \beta, \qquad t' = \beta'.$$

Es ist, wie man leicht zeigt,

$$\pm\tfrac{1}{2}(m+n) = \alpha\alpha', \qquad \beta\beta' = \frac{1}{\nu}\cdot\alpha\alpha',$$

ferner, da

$$x\lambda-\mu^2 > \mu''\mu''', \qquad 1-x\lambda > x'\lambda', \qquad \text{auch} \quad \alpha' > \beta'$$

und daher um so mehr

$$\frac{1}{\nu}\alpha' > \beta', \qquad \alpha < \beta.$$

Hieraus folgt, wenn $x\lambda > \mu$, also die oberen Zeichen gelten,

$$J = \int \frac{(f' - g' t^2)\, dt}{\sqrt{\{F(t)\}}} + \int \frac{(f' - g' t'^2)\, dt'}{\sqrt{\{F(t')\}}},$$

wenn $x\lambda < \mu$, also die untern Zeichen gelten,

$$J = \int \frac{(f' + g' t^2)\, dt}{\sqrt{\{F(t)\}}} - \int \frac{(f' + g' t'^2)\, dt'}{\sqrt{\{F(t')\}}},$$

wo

$$f' = \frac{\pm (m+n)(f\mu - g)}{(1-\mu) N}, \qquad g' = \frac{2(f\mu + g)}{(1-\mu) N},$$

$$F(t) = (t^2 - \alpha^2)(\beta^2 - t^2)(\beta'^2 - t^2)(\alpha'^2 - t^2),$$

$$F(t') = (t'^2 - \alpha^2)(t'^2 - \beta^2)(t'^2 - \beta'^2)(\alpha'^2 - t'^2).$$

8.

Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine*.)

§. 1.

Es ist seit *Euler* bekannt, dafs das bestimmte Integral

$$y = \int_0^1 V\,du,$$

in welchem

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

gesetzt ist, der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta\gamma = 0$$

genügt. Um dies nach dem Vorgange *Eulers* (Institutiones calc. integr. Vol. II, Sect. I, Cap. X, Problema 130) zu beweisen, hat man nur nöthig, in die linke Seite von (1.) für y das unbestimmte Integral $\int V\,du$ zu setzen, durch Differentiation unter dem Integrale y' und y'', d. h. $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx}$, zu bilden, und endlich zu reduciren. Dann erhält man auf der rechten Seite zu-

*) Die Abhandlung, die ich hier mittheile, verdankt ihre Entstehung einer Handschrift *Jacobis*, welche aus einer ziemlich frühen Zeit seines Lebens zu stammen scheint. Nachdem er aus dem reichen Inhalt derselben den Stoff eines Theils der Abhandlung: Formula transformationis integralium definitorum (*Crelles* Journal Bd. 15), sowie der Abhandlung: Ueber die Entwicklung des Ausdrucks etc. (*Crelles* Journal Bd. 26 oder Journal de M. *Liouville* année 1845 p. 229) entnommen hatte, blieb ein noch unbenutzter Theil der Handschrift übrig, welcher die Kugelfunctionen betraf. Die in demselben enthaltenen Untersuchungen wurden von *Jacobi* im Jahre 1843, indem er sie einer neuen Bearbeitung unterwarf, auf die allgemeine hypergeometrische Reihe ausgedehnt, und ich übernahm es während meiner damaligen Studienzeit, die in solcher Art verallgemeinerten und zu späterer Veröffentlichung bestimmten Ergebnisse zu einem Aufsatz zusammenzustellen, dessen Herausgabe jetzt in seiner dem Wesen nach unveränderten Form erfolgt, nachdem eine von *Jacobis* Hand beabsichtigte Umgestaltung durch seinen Tod vereitelt worden ist. *H.*

nächst nicht 0, sondern den Ausdruck *)

$$-\alpha u^{\beta}(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha-1} = -\alpha\cdot\frac{u(1-u)}{1-xu}V.$$

Da derselbe für $u=0$ und $u=1$ verschwindet, natürlich β und $\gamma-\beta$ positiv gedacht, so wird das bestimmte Integral $y=\int_0^1 V\,dx$, wenn es einen Sinn hat, (1.) integriren.

Es ist früher nicht beachtet worden, dafs der erwähnte Ausdruck auch für $u=\pm\infty$ verschwindet, wenn $\gamma-\alpha-1$ negativ ist, so dafs alsdann aufser den Grenzen 0 und 1, auch die Grenzen 0 und $-\infty$, 1 und ∞ Integrale von (1.) verschaffen. Mit Hinzuziehung hiervon hat man das Resultat:

Es genügt $y=\int_g^h V\,du$ der Gleichung (1.), wenn g und h zwei von den Werthen 0, 1, $\pm\infty$ bezeichnen, und $\left[\frac{u(1-u)}{(1-xu)}V\right]_g^h=0$ ist; vorausgesetzt dafs das Integral eine Bedeutung hat. Wir bedienen uns der bekannten Bezeichnung, nach der $[f(u)]_g^h$ die Differenz $f(h)-f(g)$ vorstellt.

Mit Rücksicht auf die Zusammensetzung des Ausdrucks V lag es nahe, zu den soeben betrachteten Werthen der Grenzen des Integrals $\int V\,du$, von denen die beiden ersten die Gröfsen u und $1-u$ gleich Null machen, den Werth $\frac{1}{x}$ hinzuzufügen, für welchen $1-xu$ verschwindet. Indem zunächst in die linke Seite von (1.) $y=\int_\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{x}} V\,du$ gesetzt wurde, wo ε eine Constante bedeutet, ergab sich nach gehöriger Reduction:

$$-(\gamma-\beta-1)\varepsilon^{\beta}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}x^{1-\gamma}(x-\varepsilon)^{\gamma-\beta-1}$$
$$+\alpha g^{\beta}(1-g)^{\gamma-\beta}(1-xg)^{-\alpha-1}$$

und hieraus wurde für $\varepsilon=1$ geschlossen, dafs auch

---

*) Dies kann man auch mit *Euler* so ausdrücken, dafs der vollständige nach u genommene Differentialquotient

$$-\alpha\frac{d}{du}\left(\frac{u(1-u)}{1-xu}V\right)$$

unter der Form

$$A\frac{d^2V}{dx^2}+B\frac{dV}{dx}+CV$$

darstellbar ist, wo A, B, C die von u unabhängigen in Gleichung (1.) vorkommenden Gröfsen $x(1-x)$, $\gamma-(\alpha+\beta+1)x$, $-\alpha\beta$ sind.

$$y = \int_{g}^{\frac{1}{x}} V\,du$$

der Gleichung (1.) genügt, wenn

$$\frac{u(1-u)}{(1-xu)}\,V$$

für $u = g$ verschwindet, und $1-\alpha$ positiv ist; dafs das Integral einen Werth haben mufs, ist vorausgesetzt.

Man hat demnach sechs, als bestimmte Integrale auftretende und, wie leicht zu zeigen ist, *verschiedene* Lösungen der Gleichung (1.) (d. h. solche, von denen nicht zwei einen constanten Quotienten haben). Indem wir uns hier, wie auch im Folgenden, x immer positiv denken, auf welchen Fall der eines negativen x leicht zurückzuführen ist, stellen wir diese Lösungen mit Hinzufügung der Bedingungen, unter denen sie der Gleichung (1.) genügen, zusammen:

1) wenn β und $\gamma-\beta$ positiv ist: $y = \int_{0}^{1} V\,du,$

2) - β - $\alpha+1-\gamma$ - - $y = \int_{0}^{-\infty} V\,du,$

3) - $\gamma-\beta$ - $\alpha+1-\gamma$ - - $y = \int_{1}^{\infty} V\,du,$

4) - β - $1-\alpha$ - - $y = \int_{0}^{\frac{1}{x}} V\,du,$

5) - $\alpha+1-\gamma$ - $1-\alpha$ - - $y = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V\,du,$

6) - $\gamma-\beta$ - $1-\alpha$ - - $y = \int_{1}^{\frac{1}{x}} V\,du.$

Um die Bedeutung dieser Integrale besser zu übersehen, kann man sie durch hypergeometrische Reihen ausdrücken. Man weifs nämlich, dafs $\int_{0}^{1} u^{\lambda}(1-u)^{\mu}(1-au)^{\nu}du$, abgesehen von einem constanten Factor, der hypergeometrischen Reihe gleich ist, welche nach *Gaufs* mit $F(-\nu, \lambda+1, \lambda+\mu+2, a)$ bezeichnet wird. Ferner übersieht man leicht, dafs sich die Grenzen der sechs Integrale durch geeignete Substitutionen in 0 und 1 verwandeln lassen, ohne dafs die Function unter dem Integrale ihre Form $u^{p}(1-u)^{q}(1-bu)^{r}\,du$ ver-

liert. Ich stelle die sechs in hypergeometrische Reihen ausgedrückten Lösungen, auf die man so nach einander kommt, mit den Substitutionen zusammen, welche angewandt wurden:

1) $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, Substitution $u = v$,

2) $x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$, - $u = \frac{v-1}{v}$,

3) $x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$, - $u = \frac{1}{v}$,

4) $x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$, - $u = \frac{v}{x}$,

5) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$, - $u = \frac{1}{xv}$,

6) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$,

Substitution $u = \frac{1}{x+(1-x)v}$.

Zu jeder dieser Lösungen findet man drei gleiche, nur der Form nach verschiedene, wenn man, nachdem die Grenzen der Integrale bereits durch obige Substitutionen auf 0 und 1 gebracht sind, noch drei neue Substitutionen anwendet, welche die Grenzen ungeändert lassen, nämlich die folgenden:

$$u = 1-v; \quad u = \frac{v}{1-x+vx}; \quad u = \frac{1-v}{1-vx}.$$

Durch diese geht Vdu resp. in

$$(1-x)^{-\alpha} v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{xv}{x-1}\right)^{-\alpha} dv,$$

$$(1-x)^{-\beta} v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{xv}{x-1}\right)^{\alpha-\gamma} dv,$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}(1-vx)^{\alpha-\gamma} dv$$

über; sie führen also von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ auf

$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

Stellen wir nun die in hypergeometrische Reihen übertragenen Integrale zusammen, so haben wir sechs Klassen, von denen jede vier gleichbedeutende Lösungen enthält:

Classe I.

1) $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$,
2) $(1-x)^{-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$,
3) $(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
4) $(1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$.

Classe II.

1) $x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$,
2) $x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$,
3) $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$,
4) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$.

Classe III.

1) $x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$,
2) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$,
3) $(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right)$,
4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$.

Classe IV.

1) $x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,
2) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,
3) $(1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)$,
4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$.

Classe V.

1) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$,
2) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$,
3) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$.

Classe VI.

1) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$,

2) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$,

3) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$,

4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$.

Diese 24 Reihen sind dieselben, welche *Kummer* im §. 8 seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe im 15ten Bande des *Crelle*schen Journals aufgeführt hat, über deren Bedeutung man an jener Stelle das Nähere findet. Die hier vorliegende Untersuchung giebt also das neue Resultat, dafs die bestimmten Integrale, die jenen Reihen gleich sind, sämmtlich durch Integration desselben Ausdrucks zwischen zweien der Grenzen 0, 1, $\pm\infty$, $\frac{1}{x}$ erhalten werden.

§. 2.

Eine ganz andere Art von Beziehungen zwischen Integralen der Gleichung (1.) erhält man durch Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche *Gauſs* in seiner Arbeit über mechanische Quadraturen führt. Es tritt dort (art. 8) eine Function T vom $n+1^{\text{ten}}$ Grade auf, deren Zusammenhang mit $\int_0^1 \frac{T\,dt}{t-a}$ Anlafs zur Auffindung des folgenden Satzes gab:

Ist $y=f(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (1.), so wird:

$$(2.)\qquad z=\int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(t-x)^{\varrho}} f(t)\,dt = \int_g^h W.ft\,dt$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(3.)\quad x(1-x)z''+(\varrho+1-\gamma-(2\varrho+1-\alpha-\beta)x)z'-(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)z=0,$$

wenn sowohl g als h einen der Werthe 0, 1, $\pm\infty$ hat, und

$$\left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varrho}}\left(f'(t)+\varrho\frac{f(t)}{t-x}\right)\right]_g^h = 0$$

ist. Man kann auch $h=x$ setzen; alsdann mufs aber der Ausdruck in der Parenthese für $t=g$ verschwinden, und $1-\varrho$ positiv sein.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man davon ausgehen, dafs $f(t)$ der Differentialgleichung

$$t(1-t)f''(t)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)t)f'(t) = \alpha\beta f(t)$$

genügt, welche mit $t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}$ multiplicirt, die Form annimmt

$$\alpha\beta t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}f(t) = \frac{d(t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t))}{dt}.$$

Dies in das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (2.) eingesetzt giebt nach einer theilweisen Integration:

$$\alpha\beta z = \Big[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t)}{(t-x)^{\varrho}}\Big]_g^h + \varrho\int_g^h \frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t)}{(t-x)^{\varrho+1}}dt$$

und nach einer zweiten theilweisen Integration:

$$\alpha\beta z = \Big[t(1-t)W\Big(f'(t)+\frac{\varrho f(t)}{t-x}\Big)\Big]_g^h - \varrho\int_g^h \frac{d}{dt}\Big(\frac{t(1-t)}{t-x}\cdot W\Big)f(t)\,dt.$$

Wendet man nun die in der Anmerkung des §. 1 gegebene Transformation an, nach welcher, wenn $u=\frac{1}{t}$, $u^2V=W$ gesetzt wird,

$$-\varrho\frac{d}{dt}\Big(\frac{t(1-t)}{t-x}W\Big)$$

$$= x(1-x)\frac{d^2W}{dx^2}+(\varrho+1-\gamma-(2\varrho+1-\alpha-\beta)x)\frac{dW}{dx}-\varrho(\varrho-\alpha-\beta)W$$

ist, so findet man den oben aufgestellten Satz.

Das in demselben enthaltene Ergebnifs läfst sich in eine andere Form bringen, und zwar durch Vergleichung der beiden Lösungen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ und $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)$ der Gleichung (1.), welche in den Ausdrücken 1) der I^{ten} Classe und 2) der V^{ten} Classe gegeben sind. Da nämlich $F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)$ eine Lösung ζ von

$$(1.a)\qquad x(1-x)\zeta''+(2-\gamma+(3-\alpha-\beta)x)\zeta'-(1-\alpha)(1-\beta)\zeta=0$$

ist, so läfst sich das Resultat jener Vergleichung in der Art aussprechen, dafs eine Lösung ζ von (1. a) multiplicirt mit $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ eine Lösung von (1.) giebt. Läfst man an die Stelle von (1. a) die Gleichung (3.) treten, indem man α, β, γ um $1-\varrho$ vermehrt, so folgt mit Hülfe des obigen Satzes unmittelbar, dafs

$$(4.)\qquad Z = x^{\varrho-\gamma}(1-x)^{\varrho+\gamma-\alpha-\beta-1}\int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(t-x)^{\varrho}}f(t)\,dt$$

eine Lösung derjenigen Gleichung wird, in welche gleichzeitig (1.) übergeht, d. h. von

$$(5.)\quad x(1-x)Z''+(\gamma+1-\varrho-(\alpha+\beta+3-2\varrho)x)Z'-(\alpha+1-\varrho)(\beta+1-\varrho)Z=0.$$

Setzt man hier ins Besondere $\varrho = 1$, so wird (5.) mit (1.) identisch, und man erhält aus einem Integrale $f(x)$ der Gleichung (1.) ein zweites:

$$(6.) \qquad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{t-x} f(t)\,dt.$$

§. 3.

Die letzte Formel giebt ein besonders interessantes Resultat, wenn $f(t)$ eine endliche Reihe, also eine solche hypergeometrische Reihe ist, deren erstes oder zweites Element eine negative ganze Zahl $-n$ wird. Ueber die Eigenschaften solcher endlichen Reihen soll in diesem und den folgenden Paragraphen bis §. 6 einschliefslich gehandelt werden.

Differentiirt man die Gleichung (1.)

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

mehrere Male hintereinander nach x, so erhält man

$$x(1-x)y''' + (\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x)y'' - (\alpha+1)(\beta+1)y' = 0$$
$$x(1-x)y^{IV} + (\gamma+2-(\alpha+\beta+5)x)y''' - (\alpha+2)(\beta+2)y'' = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Das durch $(n-1)$malige Differentiation gewonnene Resultat wird durch Multiplication mit

$$x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}$$

auf die Form gebracht

$$\frac{d(x^n(1-x)^n My^{(n)})}{dx} = (\alpha+n-1)(\beta+n-1)\,x^{n-1}(1-x)^{n-1}My^{(n-1)},$$

wo

$$M = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}.$$

Indem man diese Gleichung noch ferner $(n-1)$mal differentiirt, erhält man

$$\frac{d^n\{x^n(1-x)^n My^{(n)}\}}{dx^n} = (\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{d^{n-1}\{x^{n-1}(1-x)^{n-1}My^{(n-1)}\}}{dx^{n-1}},$$

und durch wiederholte Anwendung ergiebt sich hieraus für jedes ganze positive n die Gleichung:

$$\frac{d^n(x^n(1-x)^n My^{(n)})}{dx^n} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).\beta.(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)My,$$

in welcher M denselben Werth wie oben bezeichnet.

Ist nun y eine bei der $n$ten Potenz von x abbrechende hypergeometrische

Reihe, setzt man also $\beta = -n$, während α und γ beliebig bleiben, so wird

$$y = F(-n, \alpha, \gamma, x)$$

und nach obiger Gleichung:

$$F(-n, \alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n(x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma})}{dx^n}$$

oder, wenn man $\alpha+n$ für α setzt,

$$(7.) \quad F(-n, \alpha+n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n(x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma})}{dx^n}.$$

Dieser Ausdruck zeigt einerseits, dafs sich jede endliche hypergeometrische Reihe in die elegante Form der rechten Seite von (7.) bringen läfst, und giebt andrerseits dem häufig vorkommenden Differentialausdrucke der rechten Seite die entwickelte Form eines Productes von Potenzen in eine einfache hypergeometrische Reihe. Für $\alpha = \gamma = 1$ erhält man

$$\frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n(x^n(1-x)^n)}{dx^n} = F(-n, n+1, 1, x)$$

und setzt man $x = \frac{1-\xi}{2}$

$$\frac{1}{2^n.1.2\ldots n} \frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n} = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-\xi}{2}\right),$$

also links die bekannte Function, welche durch Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-2h\xi+h^2}}$ nach Potenzen von h entsteht. Den Ausdruck derselben durch die Reihe auf der rechten Seite findet man bei *Dirichlet* (*Crelles* Journal Bd. 17, S. 39). Auf ähnliche Art erhält man eine Entwicklung des $n$ten Differentialquotienten $\frac{d^n(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}}{d\xi^n}$, welcher bekanntlich für $\xi = \cos\varphi$ mit $\cos n\varphi$ zusammenhängt.

§. 4.

Es macht keine Schwierigkeit, die erzeugende Function der durch (7.) gegebenen Ausdrücke in derselben Art aufzufinden, wie es in *Crelles* Journal Band 2, S. 224 in dem schon §. 3 erwähnten besonderen Falle $\alpha = \gamma = 1$ geschehen ist. Man kann sich dazu der *Lagrange*schen Formel bedienen, nach der

$$\chi(y)\frac{dy}{dx} = \chi(x) + \frac{h}{1}\frac{d(f(x)\chi(x))}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2(f(x)^2\chi(x))}{dx^2} + \text{etc.}$$

ist, wenn zwischen x und y die Gleichung:

$$y - x = hf(y)$$

besteht, und hat nur

$$f(x) = x(1-x); \qquad \chi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$$

zu setzen. Macht man

$$F(-n, \alpha+n, \gamma, x) = X_n$$

und wie oben $2x = 1-\xi$, so erhält man

$$\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\{h-1+\sqrt{1-2h\xi+h^2}\}^{\gamma-1}\{h+1-\sqrt{1-2h\xi+h^2}\}^{\alpha-\gamma}}{(2h)^{\alpha-1}\sqrt{1-2h\xi+h^2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} h^n X_n.$$

Diese Formel, welche sich nicht durch Einfachheit zu empfehlen schien, ist nicht weiter verfolgt worden, sondern zunächst nur ein besonderer Fall derselben.

§. 5.

Man entwickle nämlich mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes

$$(1-2h\xi+h^2)^{-c}$$

nach aufsteigenden Potenzen von h. Setzt man die so entstehende Reihe

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} h^n Y_n,$$

so wird

$$Y_n = \frac{2c(2c+1)\ldots(2c+n-1)}{1.2\ldots n} F\left(-n, 2c+n, \frac{2c+1}{2}, x\right),$$

wenn x und ξ wie im vorigen Paragraphen zusammenhangen, also auch

$$Y_n = 4^n \frac{c(c+1)\ldots(c+n-1)(x(1-x))^{\frac{1}{2}(1-2c)}}{(2c+n)(2c+n+1)\ldots(2c+2n-1)\Pi n} \frac{d^n(x(1-x))^{\frac{1}{2}(2c+2n-1)}}{dx^n}.$$

§. 6.

Nach den im §. 4 mit X_n bezeichneten Ausdrücken läfst sich, wenigstens so lange γ und $\alpha+1-\gamma$ positiv sind, eine Function $\varphi(x)$ nur auf eine Art entwickeln, so dafs also, wenn man $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n X_n$ setzt, die Constanten a vollständig bestimmt sind. Man hat zum Beweise dieses Satzes nur zu zeigen, dafs

$$J_{m,n} = \int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx$$

verschwindet, sobald die ganzen Zahlen m und n von einander verschieden

sind. Es genügt aber X_n der Differentialgleichung

$$x(1-x)X_n'' + (\gamma - (\alpha+1)x)X_n' = -n(n+\alpha)X_n,$$

so dafs

$$-n(n+\alpha)J_{m,n} = \int_0^1 X_m \frac{d(x^\gamma(1-x)^{\alpha+1-\gamma}X_n')}{dx}\,dx$$

$$= \int_0^1 X_n \frac{d(x^\gamma(1-x)^{\alpha+1-\gamma}X_m')}{dx}\,dx$$

also gleich $-m(m+\alpha)J_{m,n}$ wird, woraus man schliefst, dafs $J_{m,n}$ verschwindet. Ist $m=n$, so läfst sich der Werth dieser Constanten leicht angeben, da offenbar

$$n(n+\alpha)J_{n,n} = \int_0^1 X_n' X_n' x^\gamma (1-x)^{\alpha+1-\gamma}\,dx$$

ist, ferner

$$(n-1)(n+\alpha+1)\int_0^1 X_n' X_n' x^\gamma(1-x)^{\alpha+1-\gamma}\,dx = \int_0^1 X_n'' X_n'' x^{\gamma+1}(1-x)^{\alpha+2-\gamma}\,dx$$

etc.,

so dafs man für $J_{n,n}$ den Werth

$$\frac{1}{\alpha+2n}\,\frac{\Pi n(\Pi(\gamma-1))^2\Pi(\alpha+n-\gamma)}{\Pi(\alpha+n-1)\Pi(\gamma+n-1)}$$

erhält.

§. 7.

Für ein zweites Integral der Differentialgleichung, deren erstes X_n ist, erhält man durch die Formel (6.) des §. 2 den Werth

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}}{(t-x)}F(-n, \alpha+n, \gamma, t)\,dt,$$

welcher für $\alpha=\gamma=1$ in den am Anfange des §. 2 erwähnten übergeht, wenn man $n+1$ für n, und $g=0$, $h=1$ setzt.

Nach §. 3 kann der obige Werth auch durch

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\int_g^h \frac{d^n(t^{\gamma+n-1}(1-t)^{\alpha+n-\gamma})}{dt^n}\,\frac{dt}{t-x}$$

ersetzt werden, also auch, wenn die Werthe γ, α eine Integration durch Theile gestatten, durch

$$(8.)\qquad Z_n = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\int_g^h \frac{t^{\gamma+n-1}(1-t)^{\alpha+n-\gamma}}{(t-x)^{n+1}}\,dt.$$

Die Differentialgleichung ist dann durch

$$aX_n + bZ_n$$

vollständig integrirt, wenn a und b willkürliche Constanten bezeichnen.

§. 8.

Die Resultate, welche *Gauſs* durch Vergleichung von T und $\int_0^1 \frac{Tdt}{t-a}$ für die Kettenbruchentwicklung der logarithmischen Reihe gefunden hat, lassen sich durch Vergleichung von X_n und Z_n auf die besondere hypergeometrische Reihe $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ übertragen. Man erhält auf diesem Wege fast ohne Rechnung die Resultate über die Werthe der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen, die zuerst durch Auflösung linearer Gleichungen gefunden worden sind (*Crelles* Journal Bd. 32, S. 208, so wie Bd. 34, S. 297).

Es seien $\alpha+1-\gamma$ und γ positiv, ferner $x>1$; bezeichnet man den Werth von X_n für $x=t$ mit T_n und setzt

$$-W_n = \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\frac{T_n - X_n}{t-x}dt,$$

so dafs W_n eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, so hat man offenbar die Gleichung

$$X_n\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}}{(t-x)}dt = W_n + \int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}}{t-x}Tdt$$

und hieraus, wenn man mit a und b leicht zu berechnende Constanten bezeichnet,

$$\frac{a}{x}X_n F\left(\gamma, 1, \alpha+1, \frac{1}{x}\right) = W_n + b\int_0^1 \frac{t^{\gamma+n-1}(1-t)^{\alpha+n-\gamma}}{(t-x)^{n+1}}dt.$$

Das mit b multiplicirte Integral, nach absteigenden Potenzen von x entwickelt, fängt mit x^{-n-1} an (der Grad ist $-(n+1)$): wir haben also eine Function n^{ten} Grades X_n, die, mit $F\left(\gamma, 1, \alpha+1, \frac{1}{x}\right)$ multiplicirt, eine ganze Function xW_n und einen Rest vom $-n^{\text{ten}}$ Grade giebt. Seit der Arbeit von *Gauſs* über mechanische Quadraturen ist es bekannt, wie diese Eigenschaft der X_n es möglich macht, sofort die Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruches für $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$, wie er sich aus der Abhandlung von *Gauſs* über die hyper-

geometrische Reihe (art. 13) ergiebt, nämlich nach der dortigen Bezeichnung von

$$\cfrac{x}{x-a}\;\cfrac{}{1-b}\;\cfrac{}{x-c}\;\cfrac{}{1-\text{etc.}}$$

anzugeben. Der Nenner des $2n^{\text{ten}}$ Näherungswerthes Q_{2n} ist nämlich von der Form

$$Q_{2n} = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n,$$

der des $(2n+1)^{\text{ten}}$

$$Q_{2n+1} = x(x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n),$$

wenn wir x als den ersten, $x-a$ als den zweiten zählen. Ferner mufs Q_{2n} oder Q_{2n+1}, mit $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$ multiplicirt, gleich einer ganzen Function von x vermehrt um einen Rest vom Grade $-n$ sein. Es können sich daher Q_{2n} und Q_{2n+1} nur durch constante Factoren von $F(-n, \gamma+n-1, \alpha, x)$ und $xF(-n, \gamma+n, \alpha+1, x)$ unterscheiden; bestimmt man diese gehörig, nämlich so, dafs die höchste Potenz von x die Einheit zum Factor erhält, so entsteht

$$Q^{2n} = x^n F\left(-n, 1-\alpha-n, 2-\gamma-2n, \frac{1}{x}\right),$$

$$Q_{2n+1} = x^{n+1} F\left(-n, \ -\alpha-n, 1-\gamma-2n, \frac{1}{x}\right).$$

Haben γ und $\alpha+1-\gamma$ andere Zeichen, so kann sich an den Resultaten offenbar nichts ändern.

§. 9.

Wir gehen nun zu der letzten Untersuchung über, nämlich zur Beantwortung der Frage, ob es für jeden endlichen Werth der Elemente möglich ist, die Differentialgleichung (1.) durch einfache bestimmte Integrale vollständig zu integriren. Dafs die sechs bestimmten Integrale des §. 1 nicht zugleich gelten, sieht man ohne weiteres ein; indem ich nun nicht nur, wie früher,

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha},$$

sondern auch

$$W = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}$$

setze, sollen in der folgenden Tabelle die Fälle angegeben werden, in denen $\int V\,du$ oder $\int W\,du$ eine Lösung von (1.) verschafft. Es ist dabei nach den Vorzeichen von α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ eingetheilt und, um die Anzahl der Fälle zu beschränken, angenommen worden, dafs $\beta-\alpha$ nicht negativ ist.

	β	$\gamma-\beta$	α	$\gamma-\alpha$	Lösungen $x>1$		Lösungen $x<1$	
1.	+	+	+	+			$\int_0^1 V\,du$	
2.	+	+	−	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 V\,du$	$\int_0^{\frac{1}{x}} V\,du$	$\int_0^1 V\,du$	$\int_1^{\frac{1}{x}} V\,du$
3.	+	−	+	+	$\int_0^{-\infty} W\,du$	$\int_1^{\infty} W\,du$	$\int_0^1 W\,du$	$\int_0^{-\infty} W\,du$
4.	+	−	+	−	$\int_0^{-\infty} V\,du$		$\int_0^{-\infty} V\,du$	
5.	+	−	−	+	$\int_0^{\frac{1}{x}} V\,du$			
6.	+	−	−	−	$\int_0^{-\infty} V\,du$	$\int_0^{\frac{1}{x}} V\,du$	$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V\,du$	$\int_0^{-\infty} V\,du$
7.	−	+	−	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 V\,du$		$\int_1^{\frac{1}{x}} V\,du$	
8.	−	−	−	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 W\,du$	$\int_1^{\infty} W\,du$	$\int_1^{\frac{1}{x}} W\,du$	$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} W\,du$
9.	−	−	−	−			$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V\,du$	

Da sowohl für den Fall, dafs $x>1$ als auch für den, dafs $x<1$, zwei verschiedene Lösungen angegeben werden müssen, so erkennt man in der Tabelle leicht, wann noch Lösungen zu suchen sind.

§. 10.

Um solche aufzufinden, kann man sich des in §. 2 aufgestellten Satzes bedienen. Dieser giebt nämlich die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen zweier hypergeometrischen Reihen, deren Elemente α, β, γ und $\varrho-\alpha$, $\varrho-\beta$, $\varrho+1-\gamma$ sind. Man wende ihn an, indem man an die Stelle von α, β, γ respective $\varrho-\alpha$, $\varrho-\beta$, $\varrho+1-\gamma$ setzt, so dafs zugleich $\varrho-\alpha$, $\varrho-\beta$, $\varrho+1-\gamma$ respective in

$$\varrho-(\varrho-\alpha)=\alpha, \quad \varrho-(\varrho-\beta)=\beta, \quad \varrho+1-(\varrho+1-\gamma)=\gamma$$

übergehen. Nimmt man nun ϱ so, dafs $\varrho-\alpha$ gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$ wird, so ist ein Integral der ersten Differentialgleichung eine endliche Reihe

$$F(-n, \alpha-\beta-n, \alpha+1-\gamma-n, x) = f(x);$$

die zweite Differentialgleichung ist jetzt die Differentialgleichung (1.) selbst, nach (2.) findet man also ein Integral von (1.) durch die Formel:

$$z = \int_g^h \frac{t^{\alpha-\gamma-n}(1-t)^{\gamma-\beta-n-1}}{(t-x)^{\alpha-n}} f(t)\,dt$$

oder mit Benutzung der in §. 3 gegebenen Umformung durch die Formel:

$$(9.) \qquad Z = \int_g^h \frac{d^n\{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\}}{dt^n}(t-x)^{n-\alpha}\,dt,$$

vorausgesetzt, dafs bei constantem g und h

$$\left[\frac{t^{\alpha+1-\gamma-n}(1-t)^{\gamma-\beta-n}}{(t-x)^{\alpha-n}}\left(f'(t)+\frac{\alpha-n}{t-x}f(t)\right)\right]_g^h = 0$$

ist, und dafs, wenn $h=x$, der Ausdruck in der Parenthese für $t=g$ verschwindet und $n+1-\alpha$ positiv ist.

Dieses Resultat läfst sich übrigens leicht verificiren, und ähnliche lassen sich eben so leicht auffinden, wenn man erwägt, dafs nach Integration durch Theile auf der rechten Seite unter dem Integrale

$$t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha}\,dt$$

übrig bleibt, wenn diese Operation erlaubt ist. Dieser Ausdruck, zwischen g und h integrirt, ist aber eine Lösung von (1.); sind z. B. g und h gleich 0 und 1, so giebt die Integration eine Lösung der dritten Klasse. Man schliefst hieraus unmittelbar, dafs auch, wenn die Integration durch Theile nicht gestattet ist, Z eine Lösung von (1.) ist, wenn nur das Integral einen Werth hat.

§. 11.

Wir können nun die Tafel des §. 9 vervollständigen.

1) Im ersten Falle fehlen zwei Integrale, wenn $x > 1$; man kann offenbar folgende hinzufügen:

$$\int_x^\infty \frac{d^n\{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\}}{dt^n}(t-x)^{n-\beta}\,dt,$$

$$\int_x^\infty \frac{d^n\{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\}}{dt^n}(t-x)^{n-\alpha}dt,$$

wenn n so grofs genommen wird, dafs respective $n+1-\beta$ oder $n+1-\alpha$ positiv ist. Darf $n=0$ genommen werden, so sind diese Integrale respective von der III^{ten} und IV^{ten} Klasse.

Ist $x<1$, so fehlt ein Integral, welches man jedenfalls $=(1-x)^{-\beta}\zeta$ setzen kann, wo ζ der Differentialgleichung (1.) genügt, wenn man in ihr α, β, γ, x mit β, $\gamma-\alpha$, $\beta+1-\alpha$, $\frac{1}{1-x}$ vertauscht. Man vergl. Form 3) der IV^{ten} Classe. Hieraus folgt, dafs als fehlendes Integral

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{1}{1-x}}^\infty \frac{d^n\{t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\}}{dt^n}\Big(t-\frac{1}{1-x}\Big)^{\alpha+n-\gamma}dt$$

betrachtet werden kann, wenn $\alpha+n+1-\gamma$ positiv ist. Für $n=0$ erhält man ein Integral II^{ter} Classe.

2) Im 4ten Falle, wenn $x>1$, kann offenbar

$$\int_x^\infty \frac{d^n\{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\}}{dt^n}(t-x)^{n-\beta}\,dt$$

mit der Bedingung, dafs $n+1-\beta$ positiv ist, als Lösung genommen werden. Ist $x<1$, so mache man mit Beachtung der Form 1) der II^{ten} Classe das fehlende Integral $=x^{-\alpha}\zeta$, wo ζ der Differentialgleichung genügt, in welche (1.) übergeht, wenn für α, β, γ, x resp. α, $\alpha+1-\gamma$, $\alpha+\beta+1-\gamma$, $\frac{x-1}{x}$ gesetzt wird. Dadurch erhält man als Lösung

$$x^{-\alpha}\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty} \frac{d^n\{t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\}}{dt^n}\Big(t-\frac{x-1}{x}\Big)^{n-\alpha}dt$$

mit der Bedingung, dafs $n+1-\alpha$ positiv sein mufs. Für $n=0$ erhält man Integrale der III^{ten} und V^{ten} Classe.

3) Im fünften Falle mufs man ein Integral suchen, wenn $x > 1$. Mit Berücksichtigung des 4ten Integrals Iter Classe setze man $z = (1-x)^{-\beta}\zeta$, und vertausche ähnlich wie oben α, β, γ, x mit $\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}$, so findet man

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{x}{x-1}}^{\infty} \frac{d^n\{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\}}{dt^n}\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta}dt$$

mit der Bedingung, dafs $n+1-\beta$ positiv sei. Ist $x < 1$, so erhält man zwei Integrale

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{x}{x-1}}^{-\infty} \frac{d^n\{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\}}{dt^n}\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta}dt,$$

$$x^{-\beta}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{d^n\{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{-\alpha}\}}{dt^n}\left(t-\frac{1}{x}\right)^{\gamma+n-\beta-1}dt$$

resp. mit den Bedingungen, dafs $n+1-\beta$ und $\gamma+n-\beta$ positiv sein müssen. Für $n=0$ verwandeln sich die Integrale in solche der VIten; VIten und Iten Classe.

4) Im 7ten Falle findet man für $x > 1$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_{x}^{\infty} \frac{d^n\{t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\}}{dt^n}(t-x)^{n+\beta-1}dt$$

und für $x < 1$

$$x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty} \frac{d^n\{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{-\beta}\}}{dt^n}\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n+\alpha-1}dt$$

resp. mit den Bedingungen, dafs $n+\beta$ und $n+\alpha$ positiv sein müssen. Für $n=0$ entstehen Integrale der IVten und Iten Classe.

5) Im 9ten Falle erhält man für $x > 1$

$$x^{1-\gamma}\int_{x}^{\infty} \frac{d^n\{t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\}}{dt^n}(t-x)^{\gamma+n-\beta-1}dt$$

und

$$x^{1-\gamma}\int_{x}^{\infty} \frac{d^n\{t^{\alpha-1}(1-t)^{-\beta}\}}{dt^n}(t-x)^{\gamma+n-\alpha-1}dt,$$

endlich für $x < 1$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty} \frac{d^n\{t^{-\beta}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\}}{dt^n}\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{n+\alpha-1}dt.$$

Die Bedingungen sind resp., dafs $\gamma+n-\beta$, $\gamma+n-\alpha$ und $n+\alpha$ positiv sein müssen; für $n=0$ entstehen Integrale der IIIten, IVten und IIten Classe.

9.

Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *S. Cohn*.)

Zwei bekannte Kartenprojectionen, die *stereographische* und *Mercatorsche* haben die Eigenschaft, dass sich alle Linien in der Projection unter denselben Winkeln wie auf der Kugel schneiden. *Lambert* wurde hierdurch auf die Frage geführt, allgemein die Projectionsarten zu suchen, welche diese Eigenschaft haben. Er hat dieselbe in einer sehr lehrreichen Abhandlung: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* S. 105—199 im dritten Theil seiner mathematischen Beiträge gelöst, und sie auch auf das *abgeplattete Erdsphäroid* ausgedehnt. *Lagrange* hat hiervon Gelegenheit genommen, für *alle Umdrehungsflächen* die betreffende Differentialgleichung aufzustellen und auf die allgemeinste Art zu integriren. Endlich hat *Gauss* in einer von der Kopenhagner Academie gekrönten Abhandlung S. 5 — 30 im dritten Heft von *Schumachers Astronomischen Abhandlungen* die Differentialgleichung aufgestellt, auf welche die Aufgabe für beliebige Flächen führt, auch dieselbe für *die* speciellen Flächen zweiter Ordnung integrirt, die zugleich Umdrehungsflächen, Kegel oder Cylinder sind, für welche Flächen, wie man leicht sieht, diese Integration allgemein ausgeführt werden kann. Die Integration für *beliebige* Flächen zweiter Ordnung kann jedoch, wie ich bereits vor längerer Zeit in einer vor der Berliner Academie gelesenen Note bemerkt habe, mittelst Einführung der sogenannten *elliptischen Coordinaten* auf Quadraturen zurückgeführt werden. Ich will im Folgenden die hierauf bezüglichen Formeln näher entwickeln.

*) In der hier vorliegenden Abhandlung hat *Jacobi* diejenige Anwendung der elliptischen Coordinaten auf das Problem der Kartenprojection vollständig durchgeführt, von welcher er im Jahre 1839 (Monatsbericht der Berliner Academie 1839, S. 64 und Bd. 19, S. 311 *Crelles* Journals) die erste Andeutung gegeben hatte.

Nachdem 1857 die philosophische Facultät der Göttinger Universität diese Durchführung unter Bezugnahme auf die *Jacobi*sche Andeutung zum Gegenstand einer Preisfrage gemacht hatte, wurde von Herrn *Ernst Schering* eine Lösung geliefert, welche 1858 als gekrönte Preisschrift erschienen ist.

Es sei die Fläche dadurch bestimmt, dass die drei rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte, x, y, z als Functionen zweier Grössen t und u gegeben sind. Es sei das Quadrat eines Linienelementes der Fläche gegeben,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = Tdt^2+2Udtdu+Vdu^2,$$

so hat man den Satz, *dass die Grössen T, U, V hinreichen, das Elementardreieck zu bestimmen, welches von drei unendlich nahen Punkten der Fläche gebildet wird, die den Grössen t, u; $t+\tau$, $u+v$; $t+\tau'$, $u+v'$ entsprechen, wo τ, τ' unendlich kleine Incremente von t, und v, v' unendlich kleine Incremente von u bedeuten.*

Es seien nämlich A, B, C respective die drei Punkte der Fläche, so werden ihre Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}v, & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}v, & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}v, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}v', & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}v', & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}v', \end{array}$$

wo nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 &= T, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} &= U, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= V. \end{aligned}$$

Es wird hiernach

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= T\tau^2+2U\tau v+Vv^2, \\ \overline{AC}^2 &= T\tau'^2+2U\tau'v'+Vv'^2, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} AB.AC.\cos BAC &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}v'\right) \\ &\quad +\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}v'\right) \\ &\quad +\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}v'\right) \\ &= T\tau\tau'+U(\tau v'+\tau' v)+Vvv', \end{aligned}$$

wie man auch leicht aus der Formel

$$\overline{BC}^2 = T(\tau-\tau')^2+2U(\tau-\tau')(v-v')+V(v-v')^2$$

findet. Es wird auch

$$\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 \sin^2 BAC = 4(\triangle ABC)^2 = (TV-U^2)(\tau v'-\tau' v)^2,$$

welches die aus der Theorie der *Multiplication der quadratischen Formen* bekannte Gleichung

$$(T\tau^2+2U\tau v+Vv^2)(T\tau'^2+2U\tau' v'+Vv'^2)$$
$$= (T\tau\tau'+2U(\tau v'+\tau' v)+Vvv')^2+(TV-U^2)(\tau v'-\tau' v)^2$$

giebt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass, wenn für eine andere Fläche x, y, z andere Functionen von t und u bedeuten, und *entsprechende Punkte* diejenigen Punkte der beiden Flächen genannt werden, welche denselben Werthen der Grössen t und u zugehören, die kleinsten einander entsprechenden Theile der beiden Flächen einander ähnlich sind, wenn die drei Functionen T, U, V proportional bleiben.

Bei Auflösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche so auf einer anderen gegebenen Fläche abzubilden, dass die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben, genügt es, wenn man für die eine Fläche *eine Ebene* nimmt, welche die Vermittlung zwischen den beiden Flächen übernimmt. Denn kann man unter der gegebenen Bedingung jede Fläche auf einer Ebene und die Ebene auf jeder Fläche abbilden, so kann man unter derselben Bedingung auch jede Fläche auf jeder anderen abbilden. Man wird ferner die Aufgabe in ihrer ganzen Vollständigkeit lösen können, wenn man alle Correlationssysteme der Ebene selbst findet, die so beschaffen sind, dass die kleinsten Theile einander ähnlich werden, oder auf alle möglichen Arten unter der angegebenen Bedingung die Ebene auf sich selber abbilden kann.

Es seien p und q die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene, so sind p und q als solche Functionen von t und u zu bestimmen, dass

$$dp^2+dq^2 = M(Tdt^2+2Udtdu+Vdu^2)$$

oder

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 = MT, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = MV,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial u} = MU,$$

wo $\sqrt{M}$ die Grösse ist, mit welcher man die dem Punkte, dessen Coordinaten p und q sind, benachbarten Linienelemente der Ebene multipliciren muss, um die entsprechenden Linienelemente der gegebenen Fläche zu erhalten.

Da die Elemente dt und du gänzlich von einander unabhängig und $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ lineare Functionen derselben sind, so kann man die Ausdrücke

$$dp+dq\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad dp-dq\sqrt{-1}$$

definiren als lineare Factoren des quadratischen Ausdrucks $Tdt^2+2Udtdu+Vdu^2$, welche zugleich vollständige Differentiale sind. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ noch mit beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ multiplicirt. *Um daher p und q auf die allgemeinste Art als Functionen von t und u zu finden, zerfälle man den gegebenen Ausdruck des Quadrats des Linienelementes*

$$Tdt^2+2Udtdu+Vdu^2$$

in seine linearen Factoren, multiplicire jeden derselben mit solcher Function von t und u, dass er ein vollständiges Differential wird, und setze die beiden Integrale beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ und von $p-q\sqrt{-1}$ gleich.

Ich will als Beispiele die drei Fälle betrachten, in welchen die Fläche durch Umdrehung erzeugt oder ein Kegel oder ein Cylinder ist, und dann zu der Aufgabe übergehen, ein dreiaxiges Ellipsoid auf einer Fläche abzubilden.

II.

Abbildung von Umdrehungsflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x=t\cos u, \quad y=t\sin u, \quad z=F(t),$$

wie man für eine Umdrehungsfläche annehmen kann. Es wird dann das Quadrat des Linienelementes

$$Tdt^2+t^2du^2,$$

wo

$$T=1+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Es werden hier

$$\frac{\sqrt{T}dt}{t}+du\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{T}dt}{t}-du\sqrt{-1}$$

die integrablen Factoren, und daher

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \mathrm{T}+u\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \mathrm{T}-u\sqrt{-1},$$

wo $\mathrm{T}=\int\frac{\sqrt{T}dt}{t}$, die allgemeinsten Gleichungen, welche zwischen p, q und

t, u Statt finden können. Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \mathrm{T}. \qquad q = u,$$

und es wird t der Quotient des Linienelementes der Fläche und der Ebene.

Es bedeutet in diesen Formeln die z-Axe die Umdrehungsaxe, t den Halbmesser des Parallelkreises, u die Länge. Man erhält daher die der *Mercator-schen* entsprechende Projectionsart, in welcher die durch die einzelnen Längengrade gehenden Meridiane durch äquidistante Parallellinien abgebildet werden, während die darauf senkrecht stehenden geraden Linien dem Aequator und den Parallelkreisen entsprechen. Setzt man dagegen

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man, wenn

$$p = r\cos\varphi, \qquad q = r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$\log r = \mathrm{T}, \qquad \varphi = u,$$

und es werden sich die entsprechenden Linienelemente der Projection und der Fläche, wie der Radiusvector und der Halbmesser des Parallelkreises verhalten. Diese Projectionsart entspricht der *stereographischen*, weil in ihr die Meridiankreise durch gerade Linien dargestellt werden, die von einem Punkt ausgehen, der Aequator und die Parallelkreise dagegen durch Kreise, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt haben. Die Curven, welche auf der Umdrehungsfläche alle Meridiane unter demselben Winkel schneiden, werden in der ersten Projection gerade Linien, in der zweiten eine Art Spiralen, deren Polargleichung

$$\alpha + \beta r + \gamma\varphi = 0$$

ist. *Lambert* hat noch den Fall betrachtet, wenn

$$f(x) = \varphi(x) = x^m,$$

und Werthe von m angegeben, für welche die Formeln eine practische Anwendung für gewisse specielle Zwecke finden, die man durch die Projection zu erreichen wünschen kann.

II.

Abbildung von Kegelflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \qquad y = t\sin u\cos v, \qquad z = t\sin u\sin v,$$

wo v eine Function bloss von u bedeute, so wird die Fläche ein Kegel, dessen

Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Es wird hiernach

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dt^2+t^2A\,du^2,$$

wo

$$A = 1+\sin^2u\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

eine Function bloss von u ist. Es werden daher die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Kegels

$$\frac{dt}{t}+\sqrt{-A}\,du, \qquad \frac{dt}{t}-\sqrt{-A}\,du,$$

und daher die gesuchten Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form, wenn man

$$\int\sqrt{A}\,du=\int\sqrt{(du^2+\sin^2u\,dv^2)}=\sigma$$

setzt,

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \log t+\sigma\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \log t-\sigma\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x)=\varphi(x)=\log x,$$

so erhält man

$$p=t\cos\sigma, \qquad q=t\sin\sigma$$

und daher *diejenige* Abbildung des Kegels, welche seine Abwicklung ergiebt.

III.

Abbildung von cylindrischen Flächen auf einer Ebene.

Wenn y eine Function bloss von x, und z von x und y unabhängig ist, erhält man eine cylindrische Fläche. Man kann daher

$$x=t, \quad y=F(t), \quad z=u$$

setzen, woraus

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T\,dt^2+du^2$$

folgt, wo

$$T = 1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Cylinders werden

$$\sqrt{T}\,dt+du\sqrt{-1}, \qquad \sqrt{T}\,dt-du\sqrt{-1}.$$

Setzt man daher

$$\int\sqrt{T}\,dt=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\sigma,$$

wo σ den Bogen eines zur Kante des Cylinders senkrechten Schnitts oder des

Schnitts der xy-Ebene bedeutet, so werden die verlangten Gleichungen:

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \sigma + z\sqrt{-1}, \quad \varphi(p-q\sqrt{-1}) = \sigma - z\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \sigma, \quad q = z = u,$$

und daher wieder diejenige Abbildung, die durch die Abwicklung des Cylinders gegeben wird.

Abbildung eines Ellipsoids und der beiden Hyperboloide auf einer Ebene.

Es seien b und c gegebene positive Constanten und c die grössere derselben; es seien ferner ϱ, ϱ_1, ϱ_2 drei Grössen, von denen die erste grösser als c, die dritte kleiner als b und die zweite zwischen b und c liegt; so werden

$$1 = \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_1^2 - c},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_2^2 - c^2}$$

die Gleichungen eines Ellipsoids, eines einflächigen und eines zweiflächigen Hyperboloids. Betrachtet man x, y, z als Functionen von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, wie sie durch die vorstehenden Gleichungen gegeben werden, so findet man, wie bekannt ist,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} d\varrho^2 + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2)}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)} d\varrho_1^2 + \frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)} d\varrho_2^2.$$

Betrachtet man nach einander erstens ϱ, zweitens ϱ_1, drittens ϱ_2 als constant, so giebt der vorstehende Ausdruck die Quadrate der Linienelemente der drei genannten Flächen:

1) *für das Ellipsoid* (ϱ constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)} + \frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

2) *für das einflächige Hyperboloid* (ϱ_1 constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho^2 - \varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)\,d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

3) *für das zweiflächige Hyperboloid* (ϱ_2 constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho^2 - \varrho_1^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)\,d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}.$$

Die linearen integrablen Factoren dieser Ausdrücke werden:

1) $\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}d\varrho_1 \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}d\varrho_2\sqrt{-1}$;

2) $\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}d\varrho_2\sqrt{-1}$;

3) $\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}d\varrho_1\sqrt{-1}$,

und man erhält in jedem der drei Fälle die allgemeinste Auflösung der Aufgabe, wenn man die Integrale der beiden dem Doppelzeichen $\pm$ entsprechenden Ausdrücke respective einer willkürlichen Function von $p+q\sqrt{-1}$ und einer willkürlichen Function von $p-q\sqrt{-1}$ gleich setzt.

Abbildung eines Ellipsoids auf einer Ebene.

$$\varrho > c > \varrho_1 > b > \varrho_2.$$

$$U=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}d\varrho_1, \qquad V=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}d\varrho_2.$$

1) In U ist ϱ_1 variabel, ϱ constant. Man setze

$$\varrho_1^2-b^2=y^2(c^2-\varrho_1^2) \quad \text{oder} \quad \varrho_1^2(1+y^2)=b^2+c^2y^2,$$

so wird

$$\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)\}}} = \frac{dy}{\sqrt{\{(1+y^2)(b^2+c^2y^2)\}}},$$

$$\varrho^2-\varrho_1^2 = \frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{1+y^2},$$

und daher

$$U=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{b^2+c^2y^2}\right\}}\frac{dy}{1+y^2}.$$

Es sei

$$y = \frac{b}{c}\operatorname{tg}\varphi,$$

so wird

$$\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2 = \frac{(\varrho^2-b^2)c^2-\varrho^2(c^2-b^2)\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{(b^2+c^2y^2)}} = \frac{c\cos\varphi\,d\varphi}{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\varphi},$$

und daher, wenn man

$$\frac{\varrho^2(c^2-b^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)} = k^2, \qquad \frac{c^2-b^2}{c^2} = k^2\sin^2\alpha$$

setzt,

$$U = \frac{\sqrt{(\varrho^2 - b^2)}}{c} \int \frac{\Delta\varphi \, d\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi},$$

oder da

$$\frac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2} = \sin^2\alpha, \qquad \frac{b^2}{\varrho^2} = \cos^2\alpha, \qquad \frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha$$

wird,

$$U = \frac{\sin\alpha \Delta\alpha}{\cos\alpha} \int \frac{\Delta\varphi \, d\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha \Delta\alpha \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2 \sin\alpha \cos\alpha \Delta\alpha \int \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Setzt man

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \qquad \int \frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = a,$$

so wird, nach den von mir in den Fundamentis eingeführten Bezeichnungen,

$$U = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a) \Delta\operatorname{am}(a) . u - \Pi(u, a)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{e^{2hu} . \Theta(u + a)}{\Theta(u - a)},$$

wenn man

$$h = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a) \Delta\operatorname{am}(a) - Z(a)$$

$$= -\frac{d \log . \Theta(a) \cos\operatorname{am}(a)}{da} = -\frac{d \log H(a + K)}{da}$$

setzt. Wenn

$$u = \frac{2K}{\pi} u', \qquad a = \frac{2K}{\pi} a', \qquad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so wird

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2u' + 2q^4 \cos 4u' - 2q^9 \cos 6u' + \cdots,$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\{\sin u' - q^2 \sin 3u' + q^6 \sin 5u' - q^{12} \sin 7u' + \cdots\},$$

und daher

$$\frac{\Theta(u + a)}{\Theta(u - a)} = \frac{1 - 2q\cos 2(u' + a') + 2q^4 \cos 4(u' + a') - \cdots}{1 - 2q\cos 2(u' - a') + 2q^4 \cos 4(u' - a') - \cdots},$$

$$H(a + K) = 2\sqrt[4]{q}\{\cos a' + q^2 \cos 3a' + q^6 \cos 5a' + \cdots\},$$

und daher

$$h = -\frac{d \log H(a + K)}{\frac{2K}{\pi} da'} = \frac{\pi}{2K} \frac{\sin a' + 3q^2 \sin 3a' + 5q^6 \sin 5a' + \cdots}{\cos a' + q^2 \cos 3a' + q^6 \cos 5a' + \cdots}.$$

Ich bemerke noch, dass

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(u) = \frac{c^2(\varrho_1^2 - b^2)}{b^2(c^2 - \varrho_1^2)},$$

und daher

$$\cos^2\varphi = \frac{b^2(c^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{c^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)},$$

$$k^2\sin^2\varphi = \frac{\varrho^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}, \qquad \Delta^2\varphi = \frac{b^2(\varrho^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}.$$

Man sieht, dass $\frac{1}{k^2}$ und $\sin^2\varphi$ dieselben Functionen respective von ϱ und ϱ_1 sind. Wenn ϱ_1 von b bis c wächst, wachsen φ und u' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und u von 0 bis K.

2) Man erhält $V\sqrt{-1}$ aus U, wenn man ϱ_1 in ϱ_2 verwandelt. Hierdurch bleiben die Constanten k, α, a, a', h unverändert, und es wird nur u verändert, und zwar nimmt es, weil ϱ_2 immer kleiner als b bleiben soll, einen imaginären Werth an, welchen ich mit $(K'+v)\sqrt{-1}$ bezeichnen werde. Man wird dann die betreffenden Formeln erhalten, wenn man in den zuletzt aufgestellten $(K'+v)\sqrt{-1}$ für u und daher $\mathrm{am}((K'+v)\sqrt{-1})$ für φ und gleichzeitig ϱ_2 für ϱ_1 setzt. Man erhält hieraus

$$\frac{-1}{k^2\sin^2\mathrm{am}((K'+v)\sqrt{-1})} = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}$$

oder

$$-\sin^2\mathrm{am}(v\sqrt{-1}) = \mathrm{tg}^2\mathrm{am}(v, k') = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)},$$

woraus, wenn man $\mathrm{am}(v, k') = \psi$ setzt,

$$\cos^2\psi = \frac{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)},$$

und, da $k'^2 = \frac{b^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)}$, auch

$$k'^2\sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \Delta^2(\psi, k') = \frac{\varrho^2(c^2-\varrho_2^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}$$

folgt. Es wird ferner

$$V = h(K'+v) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}+a)}{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}-a)}.$$

Da

$$\Theta(K'\sqrt{-1}+u) = \sqrt{-1}\,.\,e^{\frac{\pi(K'-2u\sqrt{-1})}{4K}}H(u),$$

so wird dieser Ausdruck, wenn man, wie verstattet ist, den durch Addition hinzugekommenen constanten Term fortlässt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{H(a+v\sqrt{-1})}{H(a-v\sqrt{-1})}$$
$$= hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'} - e^{-v'}) - q^2 \cos 3a'(e^{3v'} - e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'} + e^{-v'}) - q^2 \sin 3a'(e^{3v'} + e^{-3v'}) + \cdots},$$

wo $v' = \frac{\pi v}{2K}$.

Wenn ϱ_2 von 0 bis b zunimmt, wächst gleichzeitig v von 0 bis K' und $e^{v'}$ von 1 bis $\frac{1}{\sqrt{q}}$.

Will man bei Erhaltung der Aehnlichkeit der kleinsten Theile das Ellipsoid so auf einer Ebene abbilden, dass seine Krümmungslinien, welche Durchschnitte mit confocalen *zwei*flächigen Hyperboloiden sind, *gerade Linien*, die aus einem festen Punkte ausgehen, die Krümmungslinien dagegen, welche Durchschnitte mit confocalen *ein*flächigen Hyperboloiden sind, *Kreise* werden, die den festen Punkt zum Mittelpunkt haben, so findet man aus jedem gegebenen Punkte des Ellipsoids mittelst der obigen Formeln die Abscissen und Ordinaten $r\cos\eta$ und $r\sin\eta$ des entsprechenden Punktes der Ebene. Ist nämlich der feste Punkt der Anfangspunkt der Polarcoordinaten, so werden dieselben,

$$r = e^{hu} \sqrt{\left\{ \frac{1 - 2q\cos 2(u'+a') + 2q^4 \cos 4(u'+a') - \cdots}{1 - 2q\cos 2(u'-a') + 2q^4 \cos 4(u'-a') - \cdots} \right\}},$$
$$\eta = hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'} - e^{-v'}) - q^2 \cos 3a'(e^{3v'} - e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'} + e^{-v'}) - q^2 \sin 3a'(e^{3v'} + e^{-3v'}) + \cdots}.$$

Dem durch diese Polarcoordinaten bestimmten Punkte der Ebene entsprechen Punkte des Ellipsoids, deren Coordinaten

$$x = \frac{\varrho \varrho_1 \varrho_2}{bc},$$
$$y = \sqrt{\left\{ \frac{(\varrho^2 - b^2)(\varrho_1^2 - b^2)(b^2 - \varrho_2^2)}{b^2(c^2 - b^2)} \right\}},$$
$$z = \sqrt{\left\{ \frac{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - \varrho_1^2)(c^2 - \varrho_2^2)}{c^2(c^2 - b^2)} \right\}}$$

sind.

Es ist zufolge der obigen Substitutionen, wenn man $\psi = \operatorname{am}(v, k')$ setzt,

$$\varrho_1^2 = \frac{b^2}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}, \qquad \varrho_2^2 = \frac{b^2 \sin^2\psi}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\psi},$$
$$\varrho_1^2 - b^2 = \frac{b^2 k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}, \qquad b^2 - \varrho_2^2 = \frac{b^2 \sin^2\alpha \cos^2\psi}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\psi},$$
$$c^2 - \varrho_1^2 = \frac{c^2 k^2 \sin^2\alpha \cos^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}, \qquad c^2 - \varrho_2^2 = \frac{c^2 \sin^2\alpha \Delta^2(\psi, k')}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\psi}.$$

Fügt man hiezu die Formeln

$$\frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha, \qquad \frac{b^2(\varrho^2-b^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2\Delta^2\alpha}{k^2}, \qquad \frac{c^2(\varrho^2-c^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2 k'^2}{k^2\Delta^2\alpha},$$

so erhält man

$$x = N.\Delta^2\alpha\sin\psi, \quad y = N.\Delta^2\alpha\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.k'\sin^2\alpha\cos\varphi\Delta(\psi, k'),$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\Delta\alpha\sqrt{\{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)\}}}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids selber wird

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2\sin^2\alpha} + \frac{z^2\Delta^2\alpha}{\varrho^2 k'^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Für das *längliche Umdrehungsellipsoid* wird

$$b = c, \quad k^2 = 0, \quad q = 0, \quad K = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\varphi = u = u', \quad \alpha = a = a', \quad h = \operatorname{tg}\alpha.$$

Man hat ferner

$$v = v' = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos\psi} = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi), \qquad \frac{e^{v'}-e^{-v'}}{e^{v'}+e^{-v'}} = \sin\psi.$$

Man erhält daher aus dem ersten System Formeln die Polarcoordinaten eines Punktes der Ebene

$$r = e^{\operatorname{tg}\alpha\cdot\varphi},$$
$$\eta = \operatorname{tg}\alpha\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi) + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\operatorname{cotg}\alpha\sin\psi,$$

und die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes des länglichen Umdrehungsellipsoids

$$x = N.\sin\psi, \qquad y = N.\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \qquad z = N.\sin^2\alpha\cos\varphi\cos\psi,$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\psi+\sin^2\alpha\cos^2\psi)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2+z^2}{\varrho^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Wenn das Ellipsoid sich einem *abgeplatteten Umdrehungsellipsoid* annähert, oder b eine kleine Grösse ist, wodurch k sich der Einheit nähert, muss man die vorstehenden Formeln wie folgt transformiren.

Ich führe zuerst für u und a ihre Complemente

$$K-u = u_1, \qquad K-a = a_1$$

ein. Setzt man

$$\operatorname{am}(u_1) = \varphi_1, \qquad \operatorname{am}(a_1) = \alpha_1.$$

so wird

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{c^2}{\varrho^2}, \qquad \cos^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}, \qquad \Delta^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - b^2},$$

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - \varrho_1^2)}{(c^2 - b^2)(\varrho^2 - \varrho_1^2)}, \quad \cos^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - c^2)(\varrho_1^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(\varrho^2 - \varrho_1^2)}, \quad \Delta^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - c^2)\varrho_1^2}{c^2(\varrho^2 - \varrho_1^2)},$$

und die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta^2\alpha_1 \cdot y^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} + \frac{z^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} = 1.$$

und es wird nach einigen leichten Reductionen

$$x = M.\Delta^2\alpha_1\Delta\varphi_1\sin\psi, \quad y = M.\cos^2\alpha_1\cos\varphi_1\cos\psi, \quad z = M.\cos^2\alpha_1\Delta^2\alpha_1\sin\varphi_1\Delta(\psi, k'),$$

wo

$$M = \frac{\varrho}{\Delta\alpha_1\sqrt{\{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)(\cos^2\alpha_1 + k'^2\sin^2\alpha_1\sin^2\psi)\}}}.$$

Man hat ferner

$$hu = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}(K - u_1), \qquad \frac{\Theta(u + a)}{\Theta(u - a)} = \frac{\Theta(u_1 + a_1)}{\Theta(u_1 - a_1)},$$

und daher, wenn man in dem Ausdrucke von U die Constante $\frac{K d\log H(a_1)}{da_1}$ fortlässt und die Zeichen umkehrt,

$$U = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1 + a_1)}{\Theta(u_1 - a_1)}.$$

Es wird ferner

$$U = \frac{\sin\alpha\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{k'^2\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(\Delta^2\alpha_1\Delta^2\varphi_1 - k^2\cos^2\alpha_1\cos^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}.$$

Da es frei steht von U eine Constante abzuziehen und das Zeichen zu ändern, so werde ich hiefür

$$U = \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

setzen.

Diese Ausdrücke können in andere transformirt werden, in welchen die Argumente imaginär werden, und der Modul in sein Complement sich

verwandelt. Es ist aber

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u u}{4KK'}} H(K' \pm u\sqrt{-1}, k'),$$

$$H(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} e^{-\frac{\pi u u}{4KK'}} H(u\sqrt{-1}, k'),$$

und daher

$$h = \frac{d \log H(a_1)}{da_1} = -\frac{\pi a_1}{2KK'} + h_1,$$

wenn man

$$h_1 = \frac{d \log H(a_1\sqrt{-1}, k')}{da_1} = \frac{\pi}{2K'} \cdot \frac{e^{a_1'} + e^{-a_1'} - 3q'^2\left(e^{3a_1'} + e^{-3a_1'}\right) + \cdots}{e^{a_1'} - e^{-a_1'} - q'^2\left(e^{3a_1'} - e^{-3a_1'}\right) + \cdots}$$

setzt. Es wird ferner

$$U = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} \Delta\alpha_1 \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{(1 - k^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1} = hu_1 - \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u_1 + a_1)}{\Theta(u_1 - a_1)}$$

$$= h_1 u_1 - \tfrac{1}{2} \log \frac{H(K' - (u_1 + a_1)\sqrt{-1}, k')}{H(K' - (u_1 - a_1)\sqrt{-1}, k')}$$

oder, wenn man $u_1' = \frac{\pi u_1}{2K'}$, $a_1' = \frac{\pi a_1}{2K'}$ setzt,

$$U = h_1 u_1 - \tfrac{1}{2} \log \frac{e^{u_1' + a_1'} + e^{-u_1' - a_1'} + q'^2\left(e^{3u_1' + 3a_1'} + e^{-3u_1' - 3a_1'}\right) + \cdots}{e^{u_1' - a_1'} + e^{-u_1' + a_1'} + q'^2\left(e^{3u_1' - 3a_1'} + e^{-3u_1' + 3a_1'}\right) + \cdots}.$$

Wenn $\varphi_1 = 0$, wird $u_1 = 0$, wofür dieser Ausdruck von U, wie der obige Integralausdruck verschwindet, weshalb beide einander gleich gesetzt worden sind.

Man hat ferner, wenn man

$$v' = \frac{\pi v}{2K'}$$

setzt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{H(a + v\sqrt{-1})}{H(a - v\sqrt{-1})}$$

$$= hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{H(K - a_1 + v\sqrt{-1})}{H(K - a_1 - v\sqrt{-1})}$$

$$= h_1 v + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\Theta(v + a_1\sqrt{-1}, k')}{\Theta(v - a_1\sqrt{-1}, k')}$$

$$= h_1 v + \operatorname{Arctg} \frac{q'\left(e^{2a_1'} - e^{-2a_1'}\right)\sin 2v' - q'^4\left(e^{4a_1'} - e^{-4a_1'}\right)\sin 4v' + \cdots}{1 - q'\left(e^{2a_1'} + e^{-2a_1'}\right)\cos 2v' + q'^4\left(e^{4a_1'} + e^{-4a_1'}\right)\cos 4v' - \cdots}.$$

Für das abgeplattete Umdrehungsellipsoid selbst wird

$$k' = 0, \quad q' = 0, \quad K' = \tfrac{1}{2}\pi, \quad v = v' = \psi,$$

$$a_1' = a_1 = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1), \quad u_1' = u_1 = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1),$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1) + \operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1) - \operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1)} \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1)$$

$$- \tfrac{1}{2} \log \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_1)}{\operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_1)}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha_1} \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)}{\cos^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha_1} \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \alpha_1 \sin \varphi_1}{1 - \sin \alpha_1 \sin \varphi_1},$$

$$V = \frac{\psi}{\sin \alpha_1}.$$

Die Coordinaten der Punkte des Umdrehungsellipsoids werden, wenn man $M = L\cos^2\alpha_1$ setzt,

$$x = L.\cos\varphi_1 \sin\psi, \quad y = L.\cos\varphi_1 \cos\psi, \quad z = L.\cos^2\alpha_1 \sin\varphi_1,$$

wo

$$L = \frac{\varrho}{\sqrt{(1 - \sin^2\alpha_1 \sin^2\varphi_1)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2 + y^2}{\varrho^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 \cos^2 \alpha_1} = 1.$$

Der Winkel ψ ist hier die Länge und der Winkel φ_1 die excentrische Anomalie des Meridians. —

10.

Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.

(Ex ill. *C. G. J. Jacobi* manuscriptis posthumis in medium protulit *A. Clebsch.*)

---

*Reductio problematis generalis in formam simpliciorem *).*

1.

Sit V functio quaesita, sint $q_1, q_2, \ldots q_m$ variabiles independentes atque $p_1, p_2, \ldots p_m$ differentialia partialia ipsius V secundum $q_1, q_2, \ldots q_m$. Problema de integratione aequationum differentialium partialium primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium hoc est:

Data aequatione inter quantitates $V, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, *ipsam* V *ut functionem ipsarum* $q_1, q_2, \ldots q_m$ *determinare.*

Supponam aequationem propositam ipsam functionem quaesitam V non continere. Quoties enim continet, problema ad aliud revocari potest, in quo numerus variabilium independentium unitate auctus est, sed functio ipsa incognita ex aequatione differentiali evasit. Introducta enim nova variabili t, sit

$$W = t.V,$$

erit

$$V = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots \text{**)}.$$

Quibus valoribus substitutis in aequatione inter V et quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ proposita, prodibit aequatio inter variabiles independentes $t, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque differentialia partialia functionis W secundum variabiles illas sumta, ipsam functionem W non continens. Hinc, quia numerum variabilium independentium *m quemcunque* assumsimus, concessa est suppositio, aequationem differentialem propositam functionem incognitam non continere.

---

*) Epitomae paragraphorum in ipso manuscripto praeter paragraphos 66, 67 non inveniuntur. Quae tamen in usum lectoris, ut longioris commentationis decursus facilius perspiceretur, adjiciendae videbantur. *C.*

**) Significandis differentialibus partialibus signum characteristicum — ∂ —, significandis completis signum — d — adhibebo. Quod bene tenendum est.

Problema sub ea, qua in sequentibus utatur, forma proponitur.

2.

Si functio incognita ipsa aequationem differentialem partialem propositam non ingreditur, problema maxima generalitate sic enuntiari potest:

Proposita expressione

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

si data est aequatio inter quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; *invenire* $m-1$ *alias aequationes inter easdem quantitates, e quibus quantitates* $p_1, p_2, \ldots p_m$ *tales prodeant functiones ipsarum* $q_1, q_2, \ldots q_m$, *ut expressio proposita*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum dV.

Ut expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

sit differentiale completum, satisfieri debet $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationibus conditionalibus hoc schemate contentis:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right),$$

in qua aequatione indicibus i et k valores 1, 2, 3, ... m tribui possunt, vel ut aequationes tantum inter se diversae obtineantur, indici i tribuantur valores 1, 2, 3, ... $m-1$ et pro singulis ipsius i valoribus tribuantur indici k valores tantum ipso i maiores.

In aequationibus praecedentibus quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ consideratae sunt. Quod quoties fit, differentialia partialia illarum quantitatum uncis includam, sicuti antecedentibus factum est.

Conditionum integrabilitatis forma prima exhibetur.

3.

Negotium, quod suscipiam, primum est transformatio aequationum conditionalium. Quippe quas ita exhibeamus, quales fiunt, si non ut antea omnes $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones considerantur, sed

p_1 ut ipsarum $p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$
p_2 ut ipsarum $p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$
p_3 ut ipsarum $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$
. . . . . .
p_{m-1} ut ipsarum $p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$
p_m ut ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$

functiones. Ad quam suppositionem referam sequentibus differentiationes per partes instituendas, nisi aliud disertis verbis statutum sit, aut differentialia uncis inclusa reperias, quo facto semper innuitur, omnes p_1, p_2, $\ldots$ p_m tamquam ipsarum q_1, q_2, $\ldots$ q_m functiones spectari.

Systema *primum* aequationum conditionalium, quod respondet valori $i = 1$, hoc est:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right), \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right) = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right), \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_m}\right) = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).$$

Quod e supra statutis sic representari potest:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),\\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}$$

Quae aequationes per aequationes conditionales in has transformari possunt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),\\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right).\\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \left(\frac{\partial p_4}{\partial q_1}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicemus aequationem 2^{am}, 3^{am}, $\ldots$ $(m-1)^{tam}$ per $\frac{\partial p_2}{\partial p_3}$, $\frac{\partial p_2}{\partial p_4}$, $\cdots$ $\frac{\partial p_2}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus a prima; multiplicemus aequationem 3^{am}, 4^{tam}, $\ldots$ $(m-1)^{tam}$ per $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}$, $\frac{\partial p_3}{\partial p_5}$, $\cdots$ $\frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ et productarum summam subducamus de secunda; multiplicemus aequationem 4^{tam}, 5^{tam}, $\ldots$ $(m-1)^{tam}$ per $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}$, $\frac{\partial p_4}{\partial p_6}$, $\cdots$ $\frac{\partial p_4}{\partial p_m}$, et productarum summam deducamus de tertia; et ita porro. Quibus patratis aliud eruimus systema aequationum, systemati primo aequivalens, hoc:

$$
(\mathrm{A.})\left\{
\begin{aligned}
(1.)\quad & \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}+\;\cdots\;+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\\
& +\frac{\partial p_1}{\partial q_2}-\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\;\cdots\;-\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=-\frac{\partial\cdots}{\partial\cdots}\\
(2.)\quad & \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_3}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_3}{\partial q_5}+\;\cdots\;+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\\
& +\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\;\cdots\;-\frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=-\frac{\partial\cdots}{\partial\cdots}\\
(3.)\quad & \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_4}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_4}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5}+\;\cdots\;+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m}\\
& +\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_4}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\;\cdots\;-\frac{\partial p_4}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=-\frac{\partial\cdots}{\partial\cdots}\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(m-2.)\quad & \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_3}+\;\cdots\;+\frac{\partial p_1}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\\
& +\frac{\partial p_1}{\partial q_{m-1}}-\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial\cdots}{\partial\cdots}\\
(m-1.)\quad & \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_m}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_m}{\partial q_3}+\;\cdots\;+\frac{\partial p_1}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\\
& +\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial\cdots}{\partial\cdots}
\end{aligned}\right.
$$

E quibus aequationibus differentialia partialia uncis inclusa evaserunt.

4.

Systema *secundum* aequationum conditionalium, quod respondet valori $i=2$, hoc est:

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_4}\right)=\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\right),\quad \cdots\quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right)=\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right).$$

Designante k quemlibet e numeris $3, 4, \ldots m$, aequatio

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right)$$

sic etiam exhiberi potest:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_k}\right)+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right)$$

quae adhibendo aequationes

$$\left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right),$$

in sequentem abit:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_3}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_4}\right)+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right).$$

Si aequationem 1^{am}, 2^{am}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ vocamus, quae prodeunt ex aequatione praecedente loco k respective ponendo valores $3, 4, \ldots m$, multiplicemus aequationem 2^{am}, 3^{am}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}$, $\frac{\partial p_3}{\partial p_5}$, ... $\frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus de prima; multiplicemus 3^{am}, 4^{tam}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}$, $\frac{\partial p_4}{\partial p_6}$, ... $\frac{\partial p_4}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus de secunda; et ita porro. Eruetur his transactis systema aequationum hoc:

$$(\mathrm{B.})\left\{\begin{array}{ll}
(1.) & \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4}+\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_3}{\partial q_5}+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m} \\
 & \quad +\frac{\partial p_2}{\partial q_3}-\frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}-\frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}-\cdots-\frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_3}{\partial q_2} \\
(2.) & \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4}+\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5}+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\
 & \quad +\frac{\partial p_2}{\partial q_4}-\frac{\partial p_4}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}-\cdots-\frac{\partial p_4}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_4}{\partial q_2} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(m-3.) & \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_4}+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m} \\
 & \quad +\frac{\partial p_2}{\partial q_{m-1}}-\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_2} \\
(m-2.) & \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_m}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_m}{\partial q_4}+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial q_m} \\
 & \quad +\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_m}{\partial q_2}.
\end{array}\right.$$

Quod aequationum systema e praecedente (A.) eruitur, si indices omnes unitate augentur, quantum fieri per limites indicum potest.

5.

Prorsus eadem ratione demonstratur *generalis* aequatio:

$$(a.)\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+3}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+3}}+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m} \\
\quad +\frac{\partial p_i}{\partial p_k}-\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}-\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}}-\cdots-\frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}=\frac{\partial p_k}{\partial q_i},
\end{array}\right.$$

in qua i designare potest unumquemque e numeris $1, 2, 3, \ldots m-1$ atque pro singulis ipsius i valoribus designare potest k numerum unumquemque ipso i majorem usque ad valorem $k = m$. Quae igitur aequatio generalis amplectitur numerum $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationum inter se diversarum, quae e totidem aequationibus

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

derivatae sunt.

De forma usitata conditionem integrabilitatis ex ea quae proponitur derivanda.

6.

Vice versa ex aequationibus (α.) deduci possunt aequationes conditionales initio propositae

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right),$$

sive demonstrari potest theorema sequens:

Theorema I.

Supponatur:

p_1 *functio quantitatum* $p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,

p_2 – – $p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,

p_3 – – $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,

. . . . . .

p_{m-1} – – $p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,

p_m – – $q_1, q_2, \ldots q_m$,

quae tales sint functiones, ut habeatur identice:

$$(\alpha.)\quad \left.\begin{aligned} 0 = &-\frac{\partial p_k}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ &+\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}, \end{aligned}\right.$$

designante i unumquemque e numeris $1, 2, 3, \ldots m-1$ et pro singulis ipsius i valoribus designante k unumquemque e numeris $i+1, i+2, \ldots m$, unde numerus totus aequationum est $\frac{m(m-1)}{2}$: erunt aequationes illae numero $\frac{m(m-1)}{2}$ conditiones quum necessariae tum sufficientes, ut expressis

omnibus $p_1, p_2, \ldots p_m$ *per quantitates* $q_1, q_2, \ldots q_m$, *expressio*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum.

Forma secunda conditionum integrabilitatis.

7.

Conditiones illas esse necessarias antecedentibus comprobavi, quippe quas locum habere demonstravi, quoties expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum sit. Iam demonstrabo easdem conditiones esse *sufficientes*, sive quoties aequationes illae numero $\frac{m(m-1)}{2}$ locum habeant, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

esse differentiale completum.

Posito $k = m$, aequatio proposita fit:

$$(1.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Uncis rursus utimur, si $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut solarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones spectamus, unde pro ipsa p_m perinde scribi potest $\frac{\partial p_m}{\partial q_i}$ sive $\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)$.

Posito $k = m-1$, fit:

$$0 = -\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Cui aequationi si addimus aequationem (1.) multiplicatam per $\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}$, prodit:

$$(2.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}}.$$

Posito $k = m-2$, fit

$$0 = -\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Cui aequationi addo aequationem (1.) per $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}$ et aequationem (2.) per $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}$ multiplicatam, prodit:

$$(3.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}}.$$

Et ita continuando. demonstras aequationem *generalem:*

$$(b.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

in qua k valores omnes induere potest m, $m-1$, $m-2$. ... usque ad $i+1$. Unde. si ipsi i rursus valores 1, 2. 3, ... $m-1$ tribuuntur, numerus aequationum $(b.)$ fit $\frac{m(m-1)}{2}$.

Forma tertia quae est usitata.

8.

Ex aequationibus $(a.)$ theorematis I. deduxi totidem aequationes $(b.)$. Iam ex his deducam aequationes

$$(c.) \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

quarum idem est numerus.

Supponam, pro omnibus numeris i' et k, qui dato numero i maiores. ipso m non majores sunt. iam probatas esse aequationes:

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i'}}\right).$$

Quarum ope aequatio $(b.)$ transformari potest in hanc:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{i+2}}{\partial q_k}\right)+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial q_k}.$$

quae eadem est atque haec:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right).$$

In qua. si placet. etiam $k = i$ ponere licet. quippe quo casu identica fit.

Valentibus igitur aequationibus (*b.*), *si aequatio*

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i'}}\right)$$

comprobata est pro omnibus ipsorum i' et k valoribus $i+1, i+2, \ldots m$, *eadem valebit pro omnibus ipsorum i' et k valoribus* $i, i+1, \ldots m$.

Si ponitur $i = m-1$, in aequatione (*b.*) ipsi k unicus convenit valor $k = m$, unde fit illa:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m},$$

sive

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right).$$

Valent igitur aequationes (*c.*), in quibus $k > i$ statuatur, si $i = m-1$. Unde ex antecedentibus valebunt etiam, si $i = m-2$; unde ex antecedentibus valebunt etiam, si $i = m-3$, et ita porro; sive valebunt aequationes (*c.*) pro omnibus ipsius i valoribus $m-1, m-2, m-3, \ldots 2, 1$. Q. D. E. Comprobatis aequationibus (*c.*), sequitur, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum esse.

Systema conditionum $\frac{m(m-1)}{2}$, quibus satisfieri debet, ut expressio praecedens differentiale completum evadat, sub tribus formis (*a.*), (*b.*), (*c.*) exhibui. Quarum forma (*a.*) ad solvendum problema propositum sive ad determinandas functiones $p_1, p_2, \ldots p_m$ quae expressionem illam differentiale completum efficiant, prae ceteris idonea est.

De integrationibus quas e forma prima conditionum integrabilitatis solutio problematis propositi postulet.

9.

His praeparatis, iam integrationes transigendae accuratius describi possunt. Redit enim problema in determinationem functionum $p_1, p_2, \ldots p_m$, quae aequationibus (*a.*) satisfaciant. Ipsa quidem p_1 ut functio ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationem differentialem partialem propositam data est. Deinde ponendo in (*a.*) $i = 1, k = 2$, determinatur p_2 ut functio ipsarum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationem:

$$(1.)\quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} - \frac{\partial p_1}{\partial q_3}\frac{\partial p_2}{\partial p_3} - \frac{\partial p_1}{\partial q_4}\frac{\partial p_2}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_2}{\partial p_m}.$$

Quae est aequatio differentialis partialis *linearis*, cujus nota est integratio. Inventa functione p_2, quaecunque aequationi praecedenti satisfacit. ponamus in aequationibus $(a.)$: $i = 1, 2$ atque $k = 3$, prodeunt aequationes:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_2}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_2}{\partial p_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}. \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Si functionem p_1 non ut ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, sed substituto ipsius p_2 valore per integrationem aequationis (1.) invento, sicuti ipsam p_2, ut functionem ipsarum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ considerare placet, multiplicetur aequatio posterior per $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$ et priori addatur. Quo facto obtines, *si p_1 et p_2 ut functiones quantitatum reliquarum spectantur:*

$$(2.^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quarum aequationum altera ex altera invenitur indices 1 atque 2 inter se permutando. Binis aequationibus (2.) sive (2.*) ipsa p_3 ut functio quantitatum $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ determinanda est.

10.

Inventa per aequationum praecedentium integrationem etiam functione p_3, ponatur in (*a*.) $i=1, 2, 3$, atque $k=4$, prodeunt aequationes tres sequentes:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Si substitutis ipsarum p_2 et p_3 expressionibus per integrationes iam transactas inventis, omnes tres p_1, p_2, p_3 ut solarum $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ considerare et ad hanc suppositionem differentiationes per partes referre placet, primum aequatio tertia per $\frac{\partial p_2}{\partial p_3}$ multiplicata addatur secundae, prodit:

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Haec aequatio multiplicata per $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$ et tertia aequationum (3.) multiplicata per $\frac{\partial p_1}{\partial p_3}$ addatur primae, prodit:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_1}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Determinanda igitur est p_4 ut functio ipsarum $p_5, p_6, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, quae simul tribus sequentibus aequationibus satisfaciat, *in quibus* p_1, p_2, p_3 *sunt functiones ipsarum* $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, quales per integrationes praecedentes determinatae sunt:

$$(3.^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quae aequationes tres plane similes sunt et commutando indices 1, 2, 3, aliae ex aliis obtinentur.

Aequationes differentiales partiales lineares simultaneae, quibus ad singulas quantitates p eruendas satisfieri oportet; quae formam quartam conditionum integrabilitatis constituunt.

11.

Sic pergendo, determinatis $p_1, p_2, \ldots p_i$, ut functionibus ipsarum $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, generaliter determinanda erit p_{i+1} ut functio ipsarum $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationes sequentes, quae sunt numero i:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Aequationes (α.) constituunt formam *quartam*, qua exhiberi possunt conditiones integrabilitatis expressionis $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$. E qua forma haec colligis. Data p_1 ut functione reliquarum quantitatum per ipsam aequationem differentialem partialem propositam, invenitur p_2 per integrationem unius aequationis differentialis partialis linearis inter $2m-1$ variabiles; deinde p_3 satisfacere debet simul duabus aequationibus differentialibus partialibus linearibus, quae singulae sunt inter $2m-3$ variabiles; deinde p_4 satisfacere debet simul tribus aequationibus differentialibus partialibus linearibus quae singulae sunt inter $2m-5$ variabiles, et ita porro. *Ac generaliter, inventis ipsarum* $p_1, p_2, \ldots p_i$ *expressionibus per quantitates* $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ *determinatur* p_{i+1} *per* i *aequationes differentiales partiales lineares, quibus singulis satisfacere debet et quae singulae sunt inter* $2m-2i+1$ *variabiles.* Numerum igitur variabilium in investigatione cujusque insequentis functionis *duabus unitatibus* minui videmus; numerus quidem aequationum, quibus simul satisfacere debet functio quaesita, pro quaque insequente functione unitate crescit, sed hanc integrationem simultaneam, a qua abhorruisse videntur Analystae, non tantis difficultatibus impeditam esse infra patebit. Attamen antequam ipsam aggrediar integrationem istam simultaneam, conditiones integrabilitatis sub aliis adhuc formis exhibebo.

Theorema de forma conditionum integrabilitatis maxime generali.

12.

Si loco $i+1$ scribimus k atque per i numerum quemlibet ipso k minorem denotamus, aequationes (α.) sic repraesentare licet:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_k}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{k+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_k}{\partial q_i} \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_m}. \end{cases}$$

In hac aequatione est p_k functio ipsarum $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$; functio autem p_i praeter has quantitates etiam ipsam p_k continet. Iam vero patet, expressionem

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}$$

eandem manere, sive in formandis $\dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}$, $\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}$ differentietur etiam quatenus $p_{k'}, q_{k'}$ a p_k implicantur, sive tantum, quod in aequatione praecedente sup-

positum est, quatenus in p_i explicite praeter p_k inveniuntur. Priori casu enim accederent termini se invicem destruentes:

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}-\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\right\}.$$

Praeterea, si ipsa p_i differentiatur secundum q_k etiam quatenus q_k implicatur ab ipsa p_k, quae in expressione ipsius p_i invenitur, scribere licet $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$ loco $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}+\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k}$. *Unde aequationem praecedentem, si et p_i et p_k tamquam solarum $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones consideras, sic exhibere licet:*

$$(\beta.)\quad \frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}=$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}}+\frac{\partial p_i}{\partial p_{k+2}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}-\cdots-\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_k}{\partial p_m}.$$

Ordo, in quem variabiles q et quae iis respondent p disposuimus, indicibus subscriptis indicatus, prorsus arbitrarius est. Qua de re in formula praecedente ($\beta.$) variabiles q_i, q_k binae quaelibet esse possunt e numero variabilium q, et $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_m$ aliae quaelibet harum variabilium ab illis duabus diversae et cuiuslibet numeri, qui tamen numerum $m-2$ superare non potest. Statuendae autem sunt a q_i, q_k diversae, quum in formula ($\beta.$) suppositum sit $i<k$ ideoque i inter numeros $k+1, k+2, \ldots m$ non inveniatur. Habemus igitur theorema sequens:

Theorema II.

Sint $p_1, p_2, \ldots p_m$ eiusmodi functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ ut expressio $p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_mdq_m$ sit differentiale completum; si binae quaelibet p_i et p_k exprimuntur praeter $q_1, q_2, \ldots q_m$ per alias quasdam e quantitatibus p a p_i et p_k diversas, p_λ, p_μ etc. quotcunque placet, id quod infinitis modis licet, atque differentiationes per partes instituendae ad hanc repraesentationem referuntur, erit

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}+\cdots$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}-\cdots.$$

Neque necessarium est, ut in theoremate praecedente p_i atque p_k easdem aut eundem numerum quantitatum p contineant; casus enim, quo functio datas quantitates continet, eum amplectitur, quo functio aliquas harum quantitatum vel omnes non involvit.

Theorematis antecedentis demonstratio directa.

13.

Theorema praecedens facile etiam directa via deducis ex aequationibus $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$. Primum enim probari potest, *in formula proposita expressionem ad dextram immutatam manere, si differentialia secundum q_λ, q_μ, ... sumta uncis includantur, sive esse*

$$(1.)\quad \left\{\begin{matrix} \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu} + \cdots \\ -\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu} - \cdots \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}\right) + \cdots \\ -\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\right) - \cdots \end{matrix}\right.$$

Repraesentemus enim aequationis antecedentis dextram partem hoc modo:

$$\sum_\lambda \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right),$$

subscripta λ indicando, summam ad omnes valores λ, μ, ... extendendam esse. Erit porro:

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

subscripta λ' similiter summam indicando ad eosdem valores λ, μ, ... extendi.

Hinc prodit

$$\sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right)\right\} - \sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right\}$$

$$= \sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)\right\}$$

$$= \sum_\lambda\sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda\sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right).$$

Indicibus λ et λ' quum omnino iidem valores conveniant, λ et λ' in duabus

summis praecedentibus inter se commutare licet. Quod si in posteriore facimus, expressio antecedens fit:

$$\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left\{\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)-\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right)\right\},$$

quae est expressio evanescens, quia

$$\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)=\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right).$$

Unde aequatio (1.) comprobata est.

Iam ex aequatione (1.) sequitur:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}+\cdots\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}-\cdots\\
&=\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_k}\right)+\cdots\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_i}\right)-\cdots\\
&=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\\
&=-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}+\frac{\partial p_k}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Q. D. E.

Si loco k in formulis (β.) ponitur i, atque λ loco i, patet e formulis illis sive e theor. II., in formulis (α.) esse $p_1, p_2, \ldots p_i$ tales ipsorum $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m$ functiones, ut inter binas earum p_k, p_λ locum habeat aequatio:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k}=\\
&\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.
\end{aligned}$$

Haec est relatio, qua fit, sicuti infra videbimus, ut aequationes (α.) simul integrari possint.

Problema alio modo proponitur. Functiones, quibus constantibus aequiparatis ipsae p_i per $q_1, q_2, \ldots q_m$ exprimantur, aequationibus simultaneis $\frac{n(n-1)}{2}$ definiuntur.

14.

Problema de integratione *completa* aequationis differentialis partialis inter $m+1$ variabiles $V, q_1, q_2, \ldots q_m$, quae functionem quaesitam V ipsam non continet, sic etiam proponi potest.

Sit V ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functio m constantes $h_1, h_2, \ldots h_m$ involvens, quarum nulla per additionem tantum ei iuncta sit; sint $p_1, p_2, \ldots p_m$ differentialia partialia ipsius V respective secundum $q_1, q_2, \ldots q_m$ sumta. Quae differentialia partialia, quum ipsas constantes quoque $h_1, h_2, \ldots h_m$ involvant, vice versa aequari possunt $h_1, h_2, \ldots h_m$ ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_1, p_2, \ldots p_m$ functionibus. Sint aequationes sic inventae:

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \; H_m = h_m,$$

designantibus $H_1, H_2, \ldots H_m$ functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ a se invicem independentes et nullam constantium $h_1, h_2, \ldots h_m$ involventes. *Quaeritur, data una harum aequationum, ex. gr.*

$$H_1 = h_1,$$

indagare reliquas $m-1$.

Investigemus aequationes conditionales *identicas*, quibus satisfacere debent functiones $H_1, H_2, \ldots H_m$, ut ipsis $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressis ope aequationum

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad H_3 = h_3, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

expressio differentialis

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

sit differentiale completum dV.

Ponamus in theoremate II. loco indicum i, k indices 1, 2, ac loco indicum $\lambda, \mu, \ldots$ omnes reliquos 3, 4, 5, $\ldots$ m; unde eruitur aequatio:

$$(1.) \quad \left| \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} + \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} \\ \qquad - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}. \end{array} \right.$$

Sint

$$H_i = h_i, \quad H_k = h_k$$

duae quaelibet ex aequationibus propositis, quarum ope determinentur p_1 et p_2

ut functiones ipsarum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, quarum quantitatum ipsae p_1 et p_2 in aequatione praecedente functiones esse supponuntur. Sumtis deinde ipsarum p_1 et p_2 differentialibus partialibus secundum quantitates illas, substituantur in differentialibus illis, quae etiam constantes h_i et h_k involvunt, loco harum constantium functiones iis aequivalentes H_i et H_k, unde emergent eorum valores per quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ expressi absque ulla constanti h. Quos valores si in aequatione (1.) substituimus, aequatio illa evadere debet *identica*, cum nulla exstare possit aequatio inter quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ a constantibus $h_1, h_2, \ldots h_m$ prorsus libera nisi aequatio identica sit.

Ad eruendos valores differentialium partialium ipsarum p_1 et p_2, in aequatione (1.) substituendos, aequationes $H_i = h_i$, $H_k = h_k$ secundum $p_3, p_4, \ldots p_m$, differentiemus. Sint r et t binae quaelibet harum quantitatum, erit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} &= -\frac{\partial H_i}{\partial r},\\
\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H_i}{\partial t},\\
\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} &= -\frac{\partial H_k}{\partial r},\\
\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H_k}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Unde, multiplicatis prima et quarta, secunda et tertia, subductisque productis, nanciscimur:

$$(2.)\qquad \left\{\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\partial p_2}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial t} - \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial r}.\right.$$

Porro ex aequatione prima et tertia sequitur:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_1}{\partial r} &= \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial r} - \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}\\
-\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_2}{\partial r} &= \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial r} - \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}.
\end{aligned}\right.$$

Multiplicemus aequationem (1.) per

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}$$

ac ponamus in aequationibus (3.) q_1 et q_2 loco r, in aequatione (2.) $q_3, q_4, \ldots q_m$

loco r, simulque respective p_3, p_4, ... p_m loco t. Quo facto ex aequatione (1.) prodit:

$$(\gamma.) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m} \\ -\frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m} = 0. \end{cases}$$

Quae est aequatio identica quaesita, a constantibus h prorsus libera.

15.

Si in aequatione $(\gamma.)$ indicibus i et k valores omnes tribuuntur, quos induere possunt, nanciscimur aequationes $\frac{m(m-1)}{2}$, quae et ipsae tamquam conditiones spectari possunt, ut expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

integrabilis evadat. Habetur enim etiam theorema inversum:

Theorema III.

Sint H_1, H_2, ... H_m variabilium p_1, p_2, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m functiones quaecunque a se independentes, quarum binae quaelibet H_i, $H_{i'}$ satisfaciant aequationi:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m} - \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m};$$

si ex aequationibus

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

in quibus h_1, h_2, ... h_m sunt constantes arbitrariae ipsas functiones H_1, H_2, ... H_m non afficientes, eruuntur ipsarum p_1, p_2, ... p_m valores per q_1, q_2, ... q_m expressi, expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum fit.

Quod est theorema gravissimum.

Theorema antecedens de solutione problematis $\frac{n(n-1)}{2}$ *aequationibus simultaneis definienda directa via confirmatur.*

16.

Demonstratio directa praecedentis theorematis haec sese offert. E differentiatione aequationis

$$H_i = h_i$$

secundum $q_{k'}$ facta sequitur, si subscripta k signo summationis indicamus, summam ad valores 1, 2, ... n ipsius k extendi *):

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

Unde etiam multiplicatione per $\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}$ facta:

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

In qua aequatione loco k' ponendo omnes ejus valores 1, 2, ... n, fit:

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

Unde etiam, permutando H_i et $H_{i'}$,

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} = 0.$$

Hanc aequationem detrahendo de antecedente, cum sit ex hypothesi:

$$\sum_{k'}\left\{\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\right\} = 0,$$

eruimus:

$$\sum_k \sum_{k'}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) = 0.$$

Permutando k et k', quippe quibus iidem valores 1, 2, ... n conveniunt, expressionem ad laevam sic quoque scribere licet:

$$-\sum_k \sum_{k'}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right).$$

*) Simili notatione saepius in sequentibus utar, quoties sub signo summatorio plures indices inveniuntur, quorum alii constantes, alii, ut ita dicam, summantes sunt; maioris perspicuitatis causa posteriores signo summatorio subscribam.

Unde aequationem antecedentem hoc modo repraesentare possumus:

$$\Sigma\Big(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\Big)\Big\{\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big)\Big\} = 0,$$

siquidem extenditur summa ad $\frac{m(m-1)}{2}$ combinationes numerorum $1, 2, \ldots m$ pro ipsis k et k' ponendas, sive si ipsi k sub signo summatorio valores $1, 2, \ldots m-1$ tribuuntur, et pro singulis k ipsis k' valores $k+1, k+2, \ldots m$.

Si in aequatione praecedente pro ipsis i et i' bini quilibet e numeris $1, 2, \ldots m$ ponuntur, eruuntur ex ea $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationes. In quibus si quantitates

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big)$$

ut incognitas consideramus, sunt aequationes illae respectu harum incognitarum *lineares*, numerus incognitarum idem atque aequationum, et partes constantes omnes evanescentes. Unde ipsae quoque incognitae omnes evanescunt, sive pro quolibet ipsorum k et k' valore fit

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big) = 0.$$

Q. D. E.

Demonstratione antecedente etiam maxime directa via comprobari potuisset, si

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big) = 0,$$

sive si

$$p_1 dq_1+p_2 dq_2+\cdots+p_m dq_m$$

integrabilis sit, fieri

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1}+\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1}-\frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m} = 0.$$

Ceterum, quod in demonstratione antecedente theorematis III adhuc desiderari potest, ut comprobetur e $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationibus linearibus:

$$\sum_{k,k'}\Big(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\Big)x_{k,k'} = y_{i,i'}$$

in quibus quantitates $x_{k,k'}$ incognitas, quantitates $y_{i,i'}$ partes aequationum con-

stantes designant, nullam e reliquis fluere facile variis modis probatur, quum adeo eiusmodi aequationes ex elementis algebraicis sine negotio generaliter resolvantur. Quae resolutio tum demum illusoria fit, si habetur

$$\Sigma \pm \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial H_m}{\partial p_m} = 0,$$

indicibus $1, 2, \ldots m$ sub signo summatiorio omnimodis permutatis signisque $\pm$ pro ratione nota alternantibus. Haec autem aequatio ipsa est conditio, ut inter quantitates $H_1, H_2, \ldots H_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ aequatio locum habeat, ab ipsis p prorsus libera; quod si foret, haberetur etiam inter ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m$ et constantes arbitrarias relatio neque ex aequationibus

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

omnes $p_1, p_2, \ldots p_m$, quod supposuimus, ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ determinari possent.

Transformatio systematum aequationum quarum solutione simultanea secundum §. 11 *singulae p_i obtinentur.*

§. 17.

Iam ipsam aggressuri integrationem revertamur ad formam aequationum conditionalium (α.) §. 11. Difficultatem rei videmus consistere in inveniendo functione quae simul numero i aequationum differentialium partialium linearium satisfaciat. Sit f functio ipsarum $p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque

$$f = a$$

aequatio, qua determinetur functio quaesita p_{i-1} per $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, designante a constantem arbitrariam, quae ipsam f non afficiat. Designantibus p_n atque q_n quaslibet e quantitatibus $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m$ atque $q_1, q_2, \ldots q_m$ fit

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} = -\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = -\frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Unde aequationes (α.) multiplicatae per $\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}$ in has abeunt:

$$(d.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

In his aequationibus considerantur $p_1, p_2, \ldots p_i$ tamquam functiones datae ipsarum $p_{i+1}, p_{i+2}, \cdots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, inter quarum binas p_k et p_λ locum habet relatio, quam sub finem §. 13 apposui; et quaerenda est earundem quantitatum functio f talis, quae aequationibus praecedentibus simul omnibus identice satisfaciat.

Theorema affertur circa aequationum quae supra occurrunt integratione simultanea.

§. 18.

Non ego hic immorabor quaestioni generali, quando et quomodo duabus compluribusve aequationibus differentialibus partialibus una eademque functione satisfieri possit, sed ad casum propositum particularem investigationem restringam. Quippe quo praeclaris uti licet artificiis ad integrationem expediendam commodis. Maxime autem res absolvitur theoremate sequente:

Theorema IV.

Sint k, λ quilibet diversi e numeris 1, 2, ... i; sit $\varphi = f$ integrale quodcunque unius ex aequationibus (d.):

$$0 = \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

erit expressio

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}$$

alterum ejusdem aequationis integrale.

In hoc theoremate designant p_k, p_λ ipsarum q_k, q_λ, q_{i+1}, q_{i+2}, $\ldots$ q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, $\ldots$ p_m functiones, quae satisfaciunt aequationi:

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k} =$$
$$\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.$$

Quae functiones si etiam alias praeter q_k et q_λ e quantitatibus q_1, q_2, $\ldots$ q_i involvunt, eae tamquam quantitates constantes considerantur.

Quomodo ope theorematis antecedentis integratio simultanea succedat, ostenditur.

§. 19.

Ope theorematis praecedentis sic absolvitur integratio proposita. Sint φ_λ', φ_λ'', φ_λ''', etc. functiones, quae proveniunt ex expressione

$$\frac{\partial f}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

ponendo loco f successive functiones φ, φ_λ', φ_λ'', $\ldots$, ita ut generaliter habeatur

$$\varphi_\lambda^{(n)} = \frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_m}.$$

Sit jam $\varphi = f$, integrale quodcunque aequationis

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

erunt e theoremate IV etiam φ_2', φ_2'', φ_2''', cet. integralia ejusdem aequationis. Id quod patet, si in theoremate citato in locum ipsius φ aliae post alias substituuntur functiones φ_2', φ_2'', cet. Sed exstant tantummodo $2(m-i)$ integralia aequationis praecedentis a se invicem independentia et quorum aliud integrale quodvis functio esse debet, quam functionem praeterea etiam quantitates $q_2, q_3, \ldots q_i$ tamquam constantes ingredi possunt. Sit igitur $\varphi_2^{(\mu)}$ *prima* functio, quae per antecedentes φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$ et ipsas q_2, q_3, $\ldots$ q_i exprimi potest, index μ numero $2(m-i)$ aut inferior aut certe non major. Statuatur, ipsam Π esse functionem ipsarum φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, q_2, q_3, $\ldots$ q_i, erit etiam

$$f = \Pi$$

integrale aequationis (1.), quippe cujus integralia e theoremate IV. sunt φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, ipsae vero q_2, q_3, $\ldots$ q_i in aequatione (1.) pro constantibus habentur. Substituto valore $f = \Pi$ in aequatione:

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

haec aequatio hanc induit formam:

$$(2^a.)\quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\varphi_2' + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2'}\varphi_2'' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2^{(\mu-1)}}\varphi_2^{(\mu)} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2},$$

in qua variabiles independentes sunt φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, q_2. Cujus aequationis integratio jam suppeditat functionem $f = \Pi$, quae satisfaciat simul duabus aequationibus (1.) et (2.).

Evenire potest, ut identice evadat $\varphi_2' = 0$, quo casu sine ulteriore integratione ipsa functio $f = \varphi$, aequationis (1.) integrale, etiam aequationis (2.) integrale habetur. Si generalius est $\varphi_2' = c$, designante c constantem, erit

$$\Pi = \varphi - cq_2 = f$$

utriusque simul aequationis (1.) et (2.) integrale.

20.

Postquam antecedentibus monstratum est, quomodo functio $\Pi = f$ inveniatur, quae simul duabus aequationibus (1.) et (2.) satisfacit, id quod ope theorematis IV successit, jam ejusdem theorematis ope ex inventa functione Π aliam deducam Ψ, quae loco ipsius f posita duabus aequationibus illis simul

atque tertiae

$$3.\quad \left|\begin{array}{l} 0 = f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i-1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i-1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i-2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i-2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i-1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i-1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i-2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i-2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m} \end{array}\right.$$

satisfaciat.

Erunt enim e theoremate IV, siquidem in eo loco φ ponimus Π_2, atque statuimus $\lambda = 3$, ipsi k vero valores 1 et 2 tribuimus, functiones Π_3', Π_3'', ... simul utriusque aequationis (1.) et (2.) integralia. Sit $\Pi_3^{(\mu')}$ proxima functio, quae per praecedentes Π_3, Π_3', ... $\Pi_3^{(\mu'-1)}$ et ipsas q_3, q_4, ... q_i exprimi potest: numerus μ' rursus ipsum $2(m-i)$ superare non potest. Posito

$$f = \Psi,$$

designante Ψ functionem ipsarum Π, Π_3', Π_3'', ... $\Pi_3^{(\mu-1)}$, q_3, quam etiam quantitates q_4, q_5, ... q_i tamquam constantes ingredi possunt, abit (3.) in hanc:

$$(3'.)\qquad 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi}\Pi_3' + \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi_3'}\Pi_3'' + \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi_3''}\Pi_3''' + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi_3^{(\mu'-1)}}\Pi_3^{(\mu')} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_3}.$$

Quodcunque integrale hujus aequationis, in qua Π, Π_3', Π_3'', ... $\Pi_3^{(\mu'-1)}$, q_3 sunt variabiles independentes, suppeditat functionem quaesitam $f = \Psi$, quae simul tribus aequationibus (1.), (2.), (3.) satisfacit.

Et sic pergi potest, usque dum habeatur functio f simul omnibus i aequationibus (d.) satisfaciens.

21.

Ex antecedentibus hic fit integrationum decursus, quibus eruatur functio i aequationibus (d.) simul omnibus satisfaciens. Ante omnia quaerenda erat functio φ aequationi (1.) satisfaciens. Quam notum est haberi, si

$$\varphi = \text{Constans}$$

est integrale unum quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium sequentis:

$$(a.)\quad \left|\begin{array}{ll} \dfrac{dp_{i-1}}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i-1}}, & \dfrac{dq_{i-1}}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i-1}}, \\ \dfrac{dp_{i-2}}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i-2}}, & \dfrac{dq_{i-2}}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i-2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{dp_m}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \dfrac{dq_m}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{array}\right.$$

Aequatio enim $\varphi =$ Constans integrale dicitur aequationum differentialium vulgarium (*a.*) si per eas aequationi $d\varphi = 0$ identice satisfiat. Id quod fieri non potest nisi aequatio (1.) identice locum habeat.

Inventa functione φ, ex ea deducantur functiones $\varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}$ — indices subscriptos rejicio — atque exprimatur $\varphi^{(\mu)}$ per $q_2, \varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}$, quam expressionem etiam $q_3, q_4, \ldots q_i$ afficere possunt tamquam constantes. Quo facto invenitur functio Π aequationi (2".) satisfaciens, si aequatio

$$\Pi = \text{Constans}$$

est unum integrale quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dq_2}, \quad \varphi'' = \frac{d\varphi'}{dq_2}, \quad \ldots \quad \varphi^{(\mu-1)} = \frac{d\varphi^{(\mu-2)}}{dq_2}, \quad \varphi^{(\mu)} = \frac{d\varphi^{(\mu-1)}}{dq_2}.$$

Sit ipsius $\varphi^{(\mu)}$ haec expressio:

$$\varphi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(q_2, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}),$$

sequitur ex antecedentibus, si sit

$$\Pi\Big(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\Big) = \text{Constans}$$

unum integrale quodcunque aequationis differentialis vulgaris μ^{ti} ordinis inter duas variabiles φ et q_2,

$$(b.) \qquad \frac{d^\mu \varphi}{dq_2^\mu} = \varphi^{(\mu)}\Big(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\Big),$$

fieri

$$\Pi(q_1, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)})$$

functionem Π quaesitam, quae simul aequationibus (1.) et (2.) satisfacit.

Tertio loco e functione Π deducantur functiones $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(\mu'-1)}$ atque per has et q_3 exprimatur $\Pi^{(\mu')}$; sit expressio inventa

$$\Pi^{(\mu')} = \Pi^{(\mu')}(q_3, \Pi, \Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(\mu'-1)});$$

proponatur aequatio differentialis μ'^{ti} ordinis inter duas variabiles Π et q_3:

$$(c.) \qquad \frac{d^{\mu'}\Pi}{dq_3^{\mu'}} = \Pi^{(\mu')}\Big(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \frac{d^2\Pi}{dq_3^2}, \ldots \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\Big);$$

cujus integrale unum quodcunque si est

$$\Psi\Big(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \frac{d^2\Pi}{dq_3^2}, \ldots \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\Big) = \text{Constans},$$

est expressio

$$\Psi(q_3, \Pi, \Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(\mu'-1)})$$

functio quaesita Ψ, quae simul tribus aequationibus (1.), (2.), (3.) satisfacit. Id quod simili demonstratione liquet atque in functione Π investiganda dedimus. Functionem Ψ etiam quantitates $q_1, q_2, \ldots q_i$ afficere possunt tamquam constantes.

Et sic pergi potest, usque dum habeatur functio f omnibus i aequationibus (d.) satisfaciens. Ad quam inveniendam primum quod est principale eruendum est integrale quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $2(m-i)-1$ variabiles, quod locum tenet unius aequationis inter duas variabiles $(2m-2i)$ ordinis. Deinde condendae sunt aliae post alias $i-1$ aequationes differentiales vulgares inter duas variabiles ordinis $u^{(i)}, u^{(i)}, u^{(i)}, \ldots u^{(i-2)}$, et singularum inveniendum est unum integrale quodcunque, quod formandae aequationi differentiali insequenti inservit. Numeri autem $u, u', u'', \ldots u^{(i-2)}$ omnes erunt ipso $2(m-i)$ aut minores aut certe non majores. Si postremae aequationis integrale est

$$f = a,$$

designante a constantem arbitrariam, atque ex hac aequatione petitur ipsius p_{i-1} valor per $p_{i-2}, p_{i-3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ expressus, erit valor ille talis, qui omnibus i aequationibus (c.) §. 11 simul satisfacit. Quo invento etiam $p_1, p_2, \ldots p_i$, quae datae supponuntur functiones ipsarum $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots p_m$, $q_1, q_2, \ldots q_m$, exprimi possunt per $p_{i-2}, p_{i-3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$; et pergi potest ad integrationem simultaneam insequentis systematis $i-1$ aequationum differentialium partialium, quae ex aequationibus (c.) proveniunt, si $i+1$, loco i ponitur, et cujus aequationes singulae numerum variabilium *duabus* unitatibus minorem continent.

Aequationes differentiales vulgares inter binas variabiles $u^{(i)}, u^{(i)}$, cet. ordinis tamquam *auxiliares* spectari possunt: dum systema aequationum differentialium vulgarium (a.), quae sunt primi ordinis, sed inter $2(m-i)+1$ variabiles tamquam *principale* considerari potest. Quod systema principale si per eliminationem variabilium omnium praeter duas earumque differentialia ad unam revocas aequationem differentialem inter duas variabiles, ascendet ea ad ordinem $2(m-i)$ neque ad minorem ascendere potest. Ordo autem aequationis cujusvis auxiliaris pendet ab eo, quod inventum est, integrali aequationis auxiliaris praecedentis, et prout hoc vel illud inveneris, ordo major aut inferior fieri potest, qui tamen ordinem $2(m-i)$ aequationis principalis numquam egredi potest. Quin etiam e numeris $u, u', \ldots$ exsistere possunt qui evanescant, ita ut una aut pluribus aut adeo omnibus integrationibus auxiliaribus omnino supersedeatur.

Integrationum, quibus totius problematis solutio secundum methodum propositam absolvatur, decursus describitur.

22.

Si totum negotium inde ab initio prosequimur, hic erit rei processus. Data p_1 ut functione ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, quae est aequatio differentialis partialis proposita, reliquae quantitates $p_2, p_3, \ldots p_m$ ita determinandae sunt tamquam functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$, ut evadat expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

ipsa quoque p_1 per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressa, differentiale completum; quo facto erit

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

functio incognita, aequationi differentiali partiali propositae satisfaciens.

Conditur primum systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}, & \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cujus systematis si est integrale quodcunque

$$f_1 = a_1,$$

designante a_1 constantem arbitrariam, ex hac aequatione determinatur p_2 ut functio quantitatum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, unde etiam p_1 ut functio earundem quantitatum determinari potest. Quo facto, conditur systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cujus systematis si est integrale

$$\varphi = \text{Constans},$$

formantur expressiones

$$\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi}{\partial p_m},$$
$$\varphi'' = \frac{\partial\varphi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_m},$$
etc. etc.

usque dum perveniatur ad functionem

$$\varphi^{(\mu)} = \frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_m},$$

quae per antecedentes φ, φ', φ'', $\ldots$ $\varphi^{(\mu-1)}$ et ipsam q_2 exprimi potest, quod semper evenit pro numero $\mu \leqq 2m-4$. Si expressio ipsius $\varphi^{(\mu)}$ est

$$\varphi^{(\mu)}(q_2, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}),$$

formatur aequatio differentialis μ^{ti} ordinis:

$$(2^{a}.) \qquad \frac{d^{\mu}\varphi}{dq_2^{\mu}} = \varphi^{(\mu)}\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right).$$

Cuius integrale quodcunque si est

$$f_2\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right) = a_2,$$

designante a_2 constantem arbitrariam, formatur aequatio:

$$f_2 = f_2(q_2, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}) = a_2,$$

atque ope aequationum

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

exprimuntur p_1, p_2, p_3 per p_4, p_5, $\ldots$ p_m q_1, q_2, $\ldots$ q_m. Quo facto conditur systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(3.) \quad \begin{cases} \frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \frac{dp_5}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_5}, & \frac{dq_5}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_5}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cuius systematis integrale si est

$$\Pi = \text{Constans},$$

formantur functiones:

$$\Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Pi}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi}{\partial p_4} - \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Pi}{\partial p_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi}{\partial p_m},$$

$$\Pi'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_4} - \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_m},$$

etc. etc.

usque dum perveniatur ad functionem

$$\Pi^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_m},$$

quae per antecedentes Π, Π', Π'', ... $\Pi^{(\nu-1)}$ et ipsam q_2 exprimi potest existente $\nu \leqq 2m-6$. Quam expressionem etiam q_3 tamquam constans afficere potest. Scribendo igitur loco $\Pi^{(\nu)}$ hanc expressionem:

$$\Pi^{(\nu)}(q_2, \Pi, \Pi', \ldots \Pi^{(\nu-1)}),$$

conditur aequatio differentialis ν^{ti} ordinis:

$$(3^a.) \qquad \frac{d^\nu \Pi}{dq_2^\nu} = \Pi^{(\nu)}\left(q_2, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_2}, \ldots \frac{d^{\nu-1}\Pi}{dq_2^{\nu-1}}\right).$$

Cuius aequationis integrale aliquod quodcunque si est

$$\Pi_1 = \text{Constans},$$

formantur functiones

$$\Pi_1' = \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi}{\partial p_m},$$

$$\Pi_1'' = \frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_m},$$

etc. etc.

usque dum perveniatur ad functionem $\Pi^{(\nu')}$, quae per praecedentes Π_1, Π_1', Π_1'', ... $\Pi_1^{(\nu'-1)}$, et ipsam q_3 exprimi potest, rursus existente $\nu' \leqq 2m-6$. Quae expressio si est

$$\Pi_1^{(\nu')}(q_3,\ \Pi_1,\ \Pi_1',\ \Pi_1'',\ \ldots\ \Pi_1^{(\nu'-1)})$$

conditur aequatio differentialis ν'^{ti} ordinis:

$$(3^b.) \qquad \frac{d^{\nu'}\Pi_1}{dq_3^{\nu'}} = \Pi_1^{(\nu')}\Big(q_3,\ \Pi_1,\ \frac{d\Pi_1}{dq_3},\ \frac{d^2\Pi_1}{dq_3^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\Big),$$

cuius unum quaeritur integrale quodcunque

$$f_3\Big(q_3,\ \Pi_1,\ \frac{d\Pi_1}{dq_3},\ \frac{d^2\Pi_1}{dq_3^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\Big) = a_3,$$

designante a_3 constantem arbitrariam. Quo invento formatur aequatio

$$f_3 = f_3(q_3,\ \Pi_1,\ \Pi_1',\ \Pi_1'',\ \ldots\ \Pi_1^{(\nu'-1)}) = a_3,$$

et ope trium aequationum,

$$f_1 = a_1,\quad f_2 = a_2,\quad f_3 = a_3$$

exprimuntur p_1, p_2, p_3, p_4 ut functiones ipsarum p_5, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m. Et ita porro. Totum negotium in has integrationes desinit. Scilicet inventis per methodum assignatam aequationibus

$$f_1 = a_1,\quad f_2 = a_2,\quad \ldots\quad f_{m-2} = a_{m-2},$$

in quibus a_1, a_2, ... a_{m-2} sunt constantes arbitrariae, quarum unaquaeque a_i functiones f_{i+1}, f_{i+2}, ... f_{m-2} neque vero ullam eas praecedentem $f_1, f_2, \ldots f_i$ afficit, exprimantur ope harum aequationum et aequationis differentialis partialis propositae p_1, p_2, ... p_{m-1} ut functiones ipsarum p_m, q_1, q_2, ... q_m, et proponantur aequationes

$$\frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m},\quad \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m};$$

quae quum duo integralia habeant, sit alterum

$$\psi = \text{Constans},$$

et formentur functiones

$$\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m},$$

$$\psi'' = \frac{\partial\psi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\psi'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\psi'}{\partial p_m};$$

si ψ' est functio ipsius ψ ipsarumque q_1, q_3, ... q_m,

$$\psi' = \psi'(q_2, \psi)$$

integretur aequatio primi ordinis:

$$\frac{d\psi}{dq_2} = \psi'(q_2, \psi);$$

si vero ψ' non est functio ipsius ψ ipsarumque $q_2, q_3, \ldots q_m$, certe erit ψ'' functio ipsarum ψ, ψ' et quantitatum $q_2, q_3, \ldots q_m$,

$$\psi'' = \psi''(q_2, \psi, \psi'),$$

quo casu quaeratur alterum integrale aequationis differentialis secundi ordinis:

$$\frac{d^2\psi}{dq_2^2} = \psi''\left(q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}\right);$$

quibus in aequationibus considerantur $q_3, q_4, \ldots q_m$ ut constantes; sit integrale huius vel illius aequationis

$$\psi_1 = \text{Constans},$$

designante ψ_1 priore casu ipsarum q_2, ψ, posteriore ipsarum $q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}$ functionem, ac restituatur posteriore casu ψ' loco $\frac{d\psi}{dq_2}$ in functione ψ_1, quo facto formentur rursus functiones

$$\psi_1' = \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_m},$$

$$\psi_1'' = \frac{\partial\psi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial p_m};$$

erit aut ψ_1' ipsarum $\psi_1, q_3, q_4, \ldots q_m$ aut, si hoc locum non habet, certe ψ_1'' ipsarum $\psi_1, \psi_1', q_3, q_4, \ldots q_m$ functio; quaeratur integrale priore casu aequationis

$$\frac{d\psi_1}{dq_3} = \psi_1',$$

posteriore casu aequationis

$$\frac{d^2\psi_1}{dq_3^2} = \psi_1'',$$

siquidem in ψ_1'' loco ψ_1' ponitur $\frac{d\psi_1}{dq_3}$, ipsis $q_4, q_5, \ldots q_m$ in hac vel illa aequatione consideratis ut constantibus; si integrale quaesitum est

$$\psi_2 = \text{Constans},$$

ac posteriore casu in ψ_2 loco $\frac{d\psi_1}{dq_3}$ restituitur ψ_1', iam simili modo e ψ_3 deducatur functio ψ_4, ex hac ψ_5 et ita porro; postremo ex inventa functione

ψ_{m-3} formetur functio

$$\psi'_{m-3} = \frac{\partial\psi_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_{m-3}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_{m-3}}{\partial p_m},$$

quae si est ipsarum ψ_{m-3}, q_{m-1}, q_m functio, quaeratur integrale aequationis

$$\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}} = \psi'_{m-3};$$

sin minus, formetur adhuc functio

$$\psi''_{m-3} = \frac{\partial\psi'_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial\psi'_{m-3}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial\psi'_{m-3}}{\partial p_m},$$

erit ψ''_{m-3} ipsarum ψ_{m-3}, ψ'_{m-3}, q_{m-1}, q_m functio; in qua si loco ψ'_{m-3} ponitur $\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}}$, quaeratur integrale aequationis differentialis secundi ordinis $\frac{d^2\psi_{m-3}}{dq_{m-1}^2} = \psi''_{m-3}$, in hac et illa aequatione considerata q_m ut constante; sit integrale quaesitum

$$f_{m-1} = a_{m-1},$$

in quo posteriore casu restituendum est ψ'_{m-3} loco $\frac{d\psi}{dq_{m-3}}$, designante a_{m-1} constantem arbitrariam; erit inventa functione f_{m-1} totum negotium finitum. Scilicet erutis ex aequationibus

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

et ex aequatione differentiali partiali proposita ipsarum p_1, p_2, $\ldots$ p_m valoribus per q_1, q_2, $\ldots$ q_m expressis, fit

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale exactum atque

$$V = \int\{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

integrale aequationis differentialis partialis propositae, praeter constantem arbitrariam additione addendam alias $m-1$ constantes arbitrarias involvens a_1, a_2, $\ldots$ a_{m-1}.

Systemate aequationum differentialium vulgarium revocato ad unam aequationem differentialem inter duas variabiles, ordo systematis secundum huius aequationis differentialis ordinem aestimetur sive secundum numerum constantium arbitrariarum, quas integratio eius completa secum fert. Iam si aequationum differentialium auxiliarium systemata omnia ad summum ordinem ascendunt, ad quem ascendere possunt, per methodum antecedentibus propositam quaerendum est unum integrale quodcunque $\frac{m(m-1)}{2}$ systematum

aequationum differentialium inter duas variabiles; et quidem

unius	$(2m-2)^{ti}$	ordinis
duarum	$(2m-4)^{ti}$	-
trium	$(2m-6)^{ti}$	-
. . . . .		
$m-1$	2^{ti}	-

Sed systematum aequationum auxiliarium ordo plerumque multo inferior evadit; qua de re accuratius dicetur, $m-1$ systematum, quae alia post alia conduntur atque respective $(2m-2)^{ti}$, $(2m-4)^{ti}$, ... 2^{ti} ordinis sunt, singulorum unum integrale quaerendum esse; atque insuper pro singulis systematis $(2m-2i)^{ti}$ ordinis formanda esse $i-1$ systemata auxiliaria alia post alia, quae ordinem $(2m-2i)^{tum}$ non excedunt, plerumque multo inferioris ordinis sunt, et quorum singulorum unum integrale investigandum est. Methodi hactenus notae poscebant systematis $(2m-2)^{ti}$ ordinis integrationem completam, quod post unum integrale inventum ad integrationem completam aequationis differentialis vulgaris inter duas variabiles $(2m-3)^{ti}$ ordinis reducitur. Dicere solebant Analystae, se aequationem differentialem integrasse, quam ad integrationes aequationum differentialium inferiorum ordinum reduxerint. Hac mente aequatio illa $(2m-3)^{ti}$ ordinis per methodos a me antecedentibus propositas generaliter integrata est, quippe ad aequationes ordinis $(2m-4)^{ti}$ et inferiorum ordinum reducta.

Agitur de demonstratione theorematis IV., §. 18, *quo antecedentia nituntur. De inversione operationum differentialium.*

23.

Demonstrandum restat theorema IV., quo analysis antecedens tota innititur. Quam demonstrationem paullo altius repetam.

Sit f functio n variabilium x_1, x_2, ... x_n, ac proponantur duae expressiones:

$$\mathrm{A}[f] = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\mathrm{B}[f] = B_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+B_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in quibus A_1, A_2, ... atque B_1, B_2, ... sunt datae ipsarum x_1, x_2, ... x_n functiones quaecunque. Ipsae

$$\mathrm{A}[f],\quad \mathrm{B}[f]$$

sunt notationes mere symbolicae, expressiones notantes, quae post certas operationes circa functionem f transactas prodeunt; quas operationes *primam* et *secundam* dicam. Subiiciamus expressionem $B[f]$ operationi primae, expressionem $A[f]$ operationi secundae et expressiones inde prodeuntes alteram de altera deducamus, dico, *expressionem*

$$A[B[f]]-B[A[f]]$$

differentialia partialia secunda functionis f non continere, sed in ipsam formam redire:

$$C[f] = C_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+C_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+C_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Nam in altera expressione

$$A[B[f]]$$

evoluta multiplicatur $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ per A_iB_i atque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, si i et k inter se diversi sunt, per $A_iB_k+A_kB_i$; altera vero expressio quum de altera prodeat, A et B inter se permutando quo coefficientes illi non mutantur, ex utriusque expressionis differentia terminos illos prorsus abire patet. Eruitur porro in aequatione inventa:

$$A[B[f]]-B[A[f]] = C[f]$$

terminus generalis

$$C_i = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n}$$
$$-B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1}-B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2}-\cdots-B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n}.$$

Statuatur generaliter

$$A^i[f] = A[A^{i-1}[f]],$$

ita ut sit:

$$A^2[f] = A[A[f]],$$
$$A^3[f] = A[A^2[f]],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ac simili modo sit generaliter:

$$B^i[f] = B[B^{i-1}[f]],$$

porro

$$B^kA^i[f] = B^k[A^i[f]],$$
$$A^lB^kA^i[f] = A^l[B^kA^i[f]],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ita ut obtineatur ex. gr. expressio

$$B^m A^l B^k A^i [f],$$

si functio f subjicitur i vicibus iteratis operationi primae, expressio proveniens k vicibus iteratis operationi secundae, expressio proveniens l vicibus iteratis rursus operationi primae, expressio proveniens m vicibus iteratis rursus operationi secundae. His positis supponamus, expressionem

$$C_i = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$$

identice evanescere pro quolibet ipsius i valore, erit identice, quaecunque sit f functio,

$$AB[f] = BA[f],$$

sive duarum operationum ordo interverti potest. Unde deduci potest theorema generale *expressionem*

$$B^m A^l B^k A^i [f]$$

eandem evasuram, quicunque sit operationum ordo.

Ad demonstrandam propositionem praecedentem generalem, observo, fieri

$$\begin{aligned} B^k A[f] &= B^{k-1} BA[f] \quad = B^{k-1} AB[f] \\ &= B^{k-2} BAB[f] \; = B^{k-2} AB^2[f] \\ &= B^{k-3} BAB^2[f] = B^{k-3} AB^3[f] \\ &= B^{k-4} BAB^3[f] \ldots = BAB^{k-1}[f] \\ &= AB^k[f]. \end{aligned}$$

Unde

$$\begin{aligned} B^k A^i[f] &= B^k A A^{i-1}[f] \quad = AB^k A^{i-1}[f] = AB^k AA^{i-2}[f] \\ &= AAB^k A^{i-2}[f] = A^2 B^k AA^{i-3}[f] \\ &= A^2 AB^k A^{i-3}[f] = A^3 B^k AA^{i-4}[f] \ldots \\ &= A^{i-1} B^k A[f] \quad = A^{i-1} AB^k[f] = A^i B^k[f]. \end{aligned}$$

Hinc etiam eruitur

$$\begin{aligned} A^l B^k A^i[f] \quad &= A^l A^i B^k[f] \quad = A^{i+l} B^k[f] \quad = B^k A^{i+l}[f] \\ B^m A^l B^k A^i[f] &= B^m B^k A^{i+l}[f] = B^{m+k} A^{i+l}[f] \\ &\qquad\qquad = A^{i+l} B^{m+k}[f]. \end{aligned}$$

. . . . . .

Unde propositio demonstranda patet.

Formula §. antecedente inventa alia via confirmatur.

24.

Propositio inventa. si $C_i = 0$, pro quolibet ipsius i valore, fieri

$$\mathrm{AB}[f] = \mathrm{BA}[f]$$

his considerationibus confirmatur. Sint $x_1, x_2, \ldots x_n$ functiones duarum variabilium t et u, quae in ipsa f neque in ipsis A_i, B_i praeterea non inveniantur explicite. Quas functiones supponamus determinari per aequationes:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = A_1, & \frac{\partial x_2}{\partial t} = A_2, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t} = A_n, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} = B_1, & \frac{\partial x_2}{\partial u} = B_2, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u} = B_n. \end{cases}$$

Quae aequationes, ut locum habere possint, fieri debet pro quolibet ipsius i valore:

$$(2.) \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial A_i}{\partial u} = C_i = 0.$$

Sequitur autem e (1.):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{A}[f], \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \mathrm{B}[f],$$

unde etiam

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial u} = \mathrm{BA}[f], \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial t} = \mathrm{AB}[f].$$

Quae expressiones, quum differentiationum secundum t et u institutarum ordo inverti possit, inter se aequales existunt. Quod est theorema propositum.

De usu formulae inventae in integratione aequationum differentialium partialium linearium.

25.

Antecedentibus erat f functio quaecunque. Iam supponamus, esse f integrale aequationis

$$(1.) \quad 0 = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

sive esse f functionem talem, ut identice habeatur

$$\mathrm{A}[f] = 0.$$

Iam, *si rursus* $B_1, B_2, \ldots B_n$ *sunt functiones ipsarum* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *tales*

ut pro quolibet ipsius i valore, identice sit

$$0 = C_i = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n},$$

sequitur e propositione demonstrata, etiam functionem

$$\mathrm{B}[f] = B_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + B_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

esse aequationis (1.) *integrale, sive generalius functionem* $\mathrm{B}^m[f]$. Quippe quod ut fiat, identice esse debet

$$\mathrm{AB}^m[f] = 0.$$

Sed quum sint quantitates $C_i = 0$, fit identice

$$\mathrm{AB}^m[f] = \mathrm{B}^m\mathrm{A}[f],$$

quae expressio identice evanescit, quum ex hypothesi expressio $\mathrm{A}[f]$ identice evanescat.

Fieri potest, ut expressio $\mathrm{B}[f]$ et ipsa identice evanescat sive constanti aequalis evadat. Quod vero si locum non habet, cognitis ipsis $B_1, B_2, \ldots B_n$ e quovis integrali aequationis (1.) $\varphi = f$ alterum $\varphi = \mathrm{B}[f]$ deduci potest, ex hoc, posito novo integrali in locum prioris, tertium $\varphi = \mathrm{B}^2[f]$ et ita porro. Sed quum constet aequationem (1.) plura quam $n-1$ integralia non habere a se independentia, habemus propositionem,

si pro quovis ipsius i valore sit

$$0 = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n},$$

atque

$$0 = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \mathrm{A}[f],$$

inter functiones f, $\mathrm{B}[f]$, $\mathrm{B}^2[f]$, $\ldots$ $\mathrm{B}^{n-1}[f]$ *unam vel plures aequationes dari, quas ipsae* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *non ingrediuntur.*

Antecedentium in aequationes problematis propositi applicatio. Theorema generale expressiones $[\varphi, \psi]$ *concernens.*

26.

Iam ipsis $A_1, A_2, \ldots A_n, B_1, B_2, \ldots B_n$ valores quosdam tribuamus particulares, quibus fit, ut expressiones C_i omnes ejusdem functionis evadant

differentialia partialia. Quam deinde expressionem si evanescere statuimus, etiam ipsae C_i pro omnibus ipsius i valoribus evanescunt, quae est conditio requisita. Initio autem generaliorem propositionem condam. In finem propositum pono

$$n = 2m,$$

atque in loco variabilium independentium $x_1, x_2, \ldots x_n$ introduco systema duplex variabilium

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m,$$
$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m,$$

atque statuo:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}[f] = {} & A_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + A_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} \\ & + A_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + A_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + A_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \mathrm{B}[f] = {} & B_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + B_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} \\ & + B_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + B_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}; \end{aligned}$$

tandem sit:

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}[f] - \mathrm{BA}[f] = {} & \mathrm{C}[f] = \\ & C_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + C_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + C_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} \\ & + C_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + C_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + C_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}. \end{aligned}$$

His positis, fit

$$C_i^0 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^0}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} \right\},$$

$$C_i^1 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^1}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^1}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^1}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^1}{\partial p_k} \right\},$$

siquidem ipsi k sub signo Σ valores 1, 2, ... m tribuuntur. Iam ut expressiones sub signo Σ evadant differentialia partialia ejusdem expressionis, statuo

$$A_k^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \quad A_k^1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k},$$

$$B_k^0 = \frac{\partial \psi}{\partial p_k}, \quad B_k^1 = -\frac{\partial \psi}{\partial q_k},$$

unde

$$A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k}}{\partial p_i}.$$

Unde etiam permutando A et B, φ et ψ fit:

$$B_k^0 \frac{\partial A_i^\bullet}{\partial q_k} - A_k^1 \frac{\partial B_i^\bullet}{\partial p_k} = \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k}}{\partial p_i},$$

ideoque

$$C_i^0 = -\frac{\partial \sum_k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial p_i}.$$

Permutando p et q, unde simul pérmutari debent A et A^1, B et B^1, mutatur etiam C_i^0 in C_i^1. Unde formula praecedens suppeditat permutando p et q:

$$C_i^1 = \frac{\partial \sum_k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial q_i}.$$

Designabo sequentibus per $[f, \varphi]$ *expressionem sequentem:*

$$[f, \varphi] = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi}{\partial q_m},$$

unde erit

$$[f, f] = 0, \quad [f, \varphi] = -[\varphi, f].$$

Qua introducta notatione iam erit pro iis, quos ipsis A_i, B_i, A_i^1, B_i^1 valores tribuimus:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}[f] &= [f, \varphi], \\ \mathrm{B}[f] &= [f, \psi], \\ \mathrm{AB}[f] &= [[f, \psi], \varphi], \\ \mathrm{BA}[f] &= [[f, \varphi], \psi]. \end{aligned}$$

Porro

$$C_i^0 = -\frac{\partial [\varphi, \psi]}{\partial p_i}, \quad C_i^1 = \frac{\partial [\varphi, \psi]}{\partial q_i}.$$

Quibus substitutis valoribus fit

$$\mathrm{C}[f] = [[\varphi, \psi], f].$$

Unde tandem formula supra inventa

$$\mathrm{AB}[f] - \mathrm{BA}[f] = \mathrm{C}[f]$$

in hanc abit:

$$[[f, \psi], \varphi] - [[f, \varphi], \psi] = [[\varphi, \psi], f],$$

quae concinnius sic exhibetur:

$$[[f, \varphi], \psi] + [[\varphi, \psi], f] + [[\psi, f], \varphi] = 0,$$

sive habetur:

Theorema V.

Generaliter designetur, quaecunque sint R et S ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ functiones, per signum $[R, S]$ haec expressio:

$$[R,S] = \frac{\partial R}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial p_1} + \frac{\partial R}{\partial q_2}\frac{\partial S}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m}\frac{\partial S}{\partial p_m} - \frac{\partial R}{\partial p_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} - \frac{\partial R}{\partial p_2}\frac{\partial S}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial R}{\partial p_m}\frac{\partial S}{\partial q_m},$$

ponatur

$$[\varphi, \psi] = F, \quad [\psi, f] = \Phi, \quad [f, \varphi] = \Psi,$$

erit identice:

$$[F, f] + [\Phi, \varphi] + [\Psi, \psi] = 0.$$

Quod est gravissimum theorema.

De systemate aequationum differentialium vulgarium, quod aequationi $[f, \varphi] = 0$ respondeat, de eiusque tertio integrali e binis quibuslibet inveniendo.

27.

Sit f data functio, erit aequatio

$$[f, \varphi] = 0$$

aequatio differentialis partialis, cui functio φ satisfacere debet. Atque notum est, obtineri omnes functiones φ aequationi

$$(1.) \quad \begin{cases} 0 = [f, \varphi] = \dfrac{\partial f}{\partial q_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \end{cases}$$

satisfacientes, si quaeruntur integralia systematis aequationum differentialium vulgarium sequentis:

$$(2.) \quad \begin{cases} dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m = \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_1} : \dfrac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : \dfrac{\partial f}{\partial q_m} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : -\dfrac{\partial f}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quoties enim huius systematis aequationum differentialium vulgarium integrale quodcunque est

$$\varphi = \text{Const.},$$

erit φ functio aequationi (1.) satisfaciens. Iam sit

$$\psi = \text{Const.}$$

alterum integrale quodcunque aequationum (2.), erit identice:

$$[f, \varphi] = 0, \quad [f, \psi] = 0,$$

sive si notationem §. antecedentis adhibitam rursus adhibemus:

$$\Psi = 0, \qquad \Phi = 0.$$

Hoc autem casu aequatio identica theoremate V. proposita in hanc abit:

$$[f, F] = 0,$$

Unde sequitur, aequationum (2.) integrale quoque esse

$$F = [\varphi, \psi] = \text{Const.};$$

sive habetur

Theorema VI.

Sint

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

duo integralia quaecunque aequationum:

$$dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : \quad dq_1 : \quad dq_2 : \cdots : \quad dq_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial q_1} : \frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_m} : -\frac{\partial f}{\partial p_1} : -\frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

erit aequatio:

$$\text{Const.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$$

tertium integrale eiusdem aequationum differentialium vulgarium systematis.

Dilucidationes circa theorema §. antecedente propositum.

28.

Antecedentibus evenire potest, ut functio $[\varphi, \psi]$ in quantitatem constantem sive generalius in ipsarum φ et ψ functionem abeat, quo casu e duobus integralibus inventis tertium ratione quam theoremate praecedente indicavi non derivatur. Sed observo, hos casus tantum ut exceptionales considerandos esse. Generaliter dicere debemus *e duobus integralibus aequationum:*

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial U}{\partial p_1} : \frac{\partial U}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial U}{\partial p_m} : -\frac{\partial U}{\partial q_1} : -\frac{\partial U}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial U}{\partial q_m}$$

deduci posse per solas differentiationes tertium, ex hoc combinato cum duobus propositis quartum et quintum, etc. etc., ita ut e datis duobus integralibus per solas operationes differentiationis per partes cuncta deducantur propositi aequationum differentialium vulgarium systematis integralia. Scilicet, si aequa-

tionum propositarum integralia, quorum numerus $2m-1$, haec sunt:

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \ldots \quad u_{2m-1} = a_{2m-1},$$

designantibus a_1, a_2, $\ldots$ a_{2m-1} constantes arbitrarias, quae ipsas functiones u_1, u_2, $\ldots$ u_{2m-1} non ingrediuntur, erit expressio *generalis* duorum integralium:

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots u_{2m-1}) = \text{Const.},$$
$$\Theta_1(u_1, u_2, \ldots u_{2m-1}) = \text{Const.}$$

Ac, nisi functionibus Θ, Θ_1 formae quaedam particulares conciliantur, semper eveniet, ut ex his duobus integralibus

$$\Theta = \text{Const.}, \quad \Theta_1 = \text{Const.}$$

per methodum theoremate praecedente propositam identidem repetitam cuncta integralia proveniant. Ac reapse semper infinitis modis bina ejusmodi integralia, $\Theta = \text{Const.}$, $\Theta_1 = \text{Const.}$, assignare licet, e quibus per operationes propositas cuncta reliqua derivari possunt. Id quod eo majoris momenti est, quum systema aequationum differentialium vulgarium propositum idem est, cuius integratio motum suppeditat numeri cuiuslibet punctorum materialium, quae viribus quibuscunque attractionum seu repulsionum sollicitantur, ac praeterea quibuscunque conditionibus subiecta sunt. Ad theoremata antecedentia V. et VI. perveni necessitate quadam coactus, dum inquirerem, quinam sit aequationum (α.) §. 11 habitus et quaenam compositio, quibus eveniat, ut omnibus simul una eademque functione p_{i+1} satisfacere liceat. Nam hoc fieri posse aliunde constabat, quum satis notum esset, extare functionem V aequationi differentiali partiali propositae satisfacientem, quae $m-1$ constantes arbitrarias involvat, unde etiam patebat, inveniri posse praeter aequationem illam propositam alias $m-1$ aequationes inter quantitates q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m, totidem constantes arbitrarias involventes. Hinc rursus concludis, semper dari functionem p_{i+1} aequationibus (α.) omnibus simul satisfacientem eamque continere posse constantem arbitrariam. Inquirens autem in conditiones possibilitatis eiusmodi integrationis simultaneae quum ad theorema fundamentale VI. delapsus essem, ingenue fateor, theorema illud me per aliquod tempus pro invento plane novo habuisse. Quid enim magis mirum fingi potest ac paene fidem superans, quam quod inde sequitur et mox videbimus, *in omnibus problematibus mechanicis, in quibus virium vivarum conservatio locum habet, generaliter e duobus integralibus praeter principium illud inventis reliqua omnia absque ulla ulteriore*

integratione inveniri posse? Hoc theorema quomodo notum crederes, quum in nullo Tractatu Mechanico, in nullo Tractatu Analytico, in quo de integratione aequationum differentialium agitur, reperiatur, quum tamen ubique tamquam summum Calculi Integralis inventum circumferri deberet. Attamen inventum illud — ipso nescio auctore dicam? — inde ab annis novem et viginti *) factum est ab ill. *Poisson*, quippe quod prorsus idem est atque propositio illa, in formulis eius perturbatoriis, quibus differentialia elementorum perturbatorum lineariter exprimuntur per differentialia partialia functionis perturbatricis respectu elementorum sumta, coefficientes per quos differentialia illa partialia functionis perturbatricis multiplicantur, et quorum formatio eadem atque expressionum $[\varphi, \psi]$ a viro ill. inventa est, a tempore t liberos esse sive solorum elementorum esse functiones. Quae propositio vix pro nova et memorabili habebatur; nam quum formulae perturbatoriae *Lagrangianae* et *Poissonianae* aliae aliarum inversae sint et quum de suis formulis ill. *Lagrange* iam coefficientium a tempore independentiam demonstrasset, res sponte de *Poissonianis* formulis patebat seu certe mathematicis nihil habere videbatur, quod admirationem movere possit. Scilicet sola formatio differentialium elementorum perturbatorum curabatur, et quum formulae *Lagrangianae* cum in finem commodiores censerentur, formulae *Poissonianae* et propositio illa stupenda nonnisi ut propter demonstrationis difficultatem memorabiles obiter citabantur. Nemo, quantum scio, suscepit, propositionem illam per se examinare, nullo ad theoriam perturbationum respectu habito, quod si quis fecisset, fugere eum non potuisset, quantum sit eius in tractando *imperturbato* problemate momentum, eamque esse totius Mechanicae Analyticae gravissimam propositionem cuius analoga per totum Calculum Integralem non extat. Ill. *Lagrange* dum in Mech. Anal. (Vol. II, sect. VIII, art. 6) memorat, in formulis perturbatoriis *Poissonianis* coefficientes differentialium partialium functionis perturbatricis a tempore independentes esse, „sed demonstratio directa“ addit, „huius proprietatis singularis fit perdifficilis, uti videre licet in pulchra commentatione Cl. *Poisson* inserta tomo VIII Diarii Scholae Polytechnicae, ac nemo unquam fortasse eam quaesitum ivisset, nisi antea constasset de veritate huius theorematis“. Videmus ipsum summum magistrum

*) Commentatio citata lucem vidit mense Decembri anni 1809; unde iam commentationem, quam legis, sub finem anni 1838 scriptam esse conjicis. Quod etiam cum eo consentaneum est, quod formularum quarundam in hac commentatione traditarum in nota mentio fit sub die 21mo mensis Novembris anni 1838 cum Academia scientiarum Berolinensi communicata. Cf. finem §. 70. *C.*

ne suspicatum quidem esse, quid sit id, quod re vera theorema singulare reddat. Habemus hic praeclarum exemplum, nisi animo praeformata sint problemata, fieri posse, ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus. Formaverat ill. *Poisson* e binis integralibus per differentiationes partiales coefficientes formularum, quibus elementorum perturbatorum differentialia exprimuntur, eosque a tempore liberos esse docuit. Sed quum animi mathematicorum toti in formulas perturbatorias intenti essent, huius inventi id tantum ut memorabile notabatur, coefficientes formularum perturbatoriarum a tempore non pendere, non id multo magis admirabile, e binis integralibus per differentiationes partiales formari posse expressionem tertiam a tempore non pendentem. Cuiusmodi tamen expressio generaliter est tertium integrale. Putabatur ea propositio nihil novi suppeditare ultra *Lagrangiana* inventa, quum propositionis *Lagrangianae*, quae tamquam aequivalens considerabatur, in imperturbato problemate omnino nullus usus sit, nisi quod, uti ipse autor eiusmodi usum circumspiciens innuit, eius propositionis ope examinare liceat, an inventae expressiones coordinatarum per elementa et tempus iustae sint. At propositio, ad quam differentialia elementorum perturbatorum directe quaerens pervenit ill. *Poisson*, summi momenti est in indagandis ipsis problematis imperturbati integralibus, eique tamquam fundamento superstruere contingit theoriam plane novam integrationis problematum mechanicorum, in quibus principium conservationis virium vivarum valet, ac generalius omnium problematum, quae ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocari possunt, ad quae demonstrari potest etiam problemata *isoperimetrica* maxime generalia pertinere. Et quamvis fere totum hoc opusculum illo innitatur fundamento ac maxime versetur in enucleandis proprietatibus functionum $[\varphi, \psi]$, quae tertium integrale formatum e duobus propositis sive coefficientes formularum perturbatoriarum ab ill. *Poisson* traditarum suppeditant: tamen longe abesse credo, ut omnia exhauriat, quae ex hoc fonte in integrationem aequationum differentialium *dynamicarum* redundare possint, immo plurima gravissima curas posteriores exspectant.

Quum omnibus casibus et utile sit nec elegantia careat, propositiones omnes ad meras identitates revocare, theorema VI. tamquam Corollarium deduxi de aequatione identica nova et simplicissima, quam theoremate V. proposui et quae ad alias quoque quaestiones usui esse potest. Revertimur ad propositum.

Demonstratio theorematis IV.

29.

Ex theoremate VI. deducamus theorema IV., quod demonstratu propositum est, et quo nova methodus nostra aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium integrandi innitebatur.

Docet theorema VI., si identice sit:

$$[f, \varphi] = 0, \quad [f, \psi] = 0,$$

fore etiam identice

$$[f, [\varphi, \psi]] = 0.$$

Unde etiam permutando φ et f sequitur, *si identice sit*

$$[\varphi, f] = 0, \quad [\varphi, \psi] = 0,$$

fore etiam

$$[\varphi, [f, \psi]] = 0.$$

Designantibus $\varkappa$ et λ binos quoscunque e numeris 1, 2, 3, ... i inter se diversos, statuamus, functionem f e variabilibus $q_1, q_2, \ldots q_i, p_1, p_2, \ldots p_i$ tantum continere duas $q_\varkappa, q_\lambda$, ac praeterea functioni φ adhuc terminum $-p_\varkappa$, functioni ψ terminum $-p_\lambda$ additione iunctum esse, ita ut sit:

$$\frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda} = -1.$$

Hinc erit

$$(1.) \quad \begin{cases} [\varphi, f] = \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \quad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

$$(2.) \quad \begin{cases} [\psi, f] = \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \quad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\lambda} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

porro

$$(3.) \quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \quad + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Quibus ipsarum

$$[\varphi, f], \quad [\psi, f], \quad [\varphi, \psi]$$

valoribus substitutis, docet propositio praecedens, *designantibus* φ *et* ψ *tales ipsarum* $q_x, q_i, q_{i-1}, q_{i+2}, \ldots q_m, p_{i-1}, p_{i+2}, \ldots p_m$ *functiones, quae satisfaciant aequationi:*

$$0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{i-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial q_x}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i-1}}\frac{\partial\psi}{\partial q_{i-1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m},$$

ubi sit

$$f = F$$

integrale aequationis:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_{i-1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial F}{\partial p_m}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial q_x}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i-1}}\frac{\partial F}{\partial q_{i-1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial F}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial F}{\partial q_m},$$

fore expressionem

$$F = \frac{\partial\psi}{\partial q_{i-1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i-1}}+\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial\psi}{\partial p_{i-1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i-1}}-\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

eiusdem aequationis alterum integrale. Quod est theorema IV., siquidem loco φ et ψ scribitur p_x et p_i atque φ loco F. Unde iam, quae demonstranda restabant, demonstrata sunt.

Quum antecedentia forma quarta conditionum integrabilitatis innitantur, iam ut problema variis rationibus condatur, reditur ad formam primam.

30.

Methodo integrationis propositae dilucidationes addam.

Sit

$$f = a,$$

designante a constantem, aequatio differentialis partialis proposita; inventae sunt per methodum propositam aequationes

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1},$$

e quibus propositae iunctis, determinandae erant $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones. Eratque

f functio ipsarum $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_1 functio ipsarum $a, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_2 functio ipsarum $a, a_1, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_3 functio ipsarum $a, a_1, a_2, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
. . . . . .
f_{m-2} functio ipsarum $a, a_1, \ldots a_{m-3}, p_{m-1}, p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_{m-1} functio ipsarum $a, a_1, \ldots a_{m-3}, a_{m-2}, p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$.

Quantitates $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae, a est constans data, quam nullitati aequiparare licet, quam tamen uniformitatis gratia conservo. Determinatis ex aequationibus

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ldots f_{i-1} = a_{i-1}$$

ipsis $p_1, p_2, \ldots p_i$ per $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, functio f_i numero i aequationum (*d.*) §. 17 identice satisfaciebat, unde etiam functio p_{i+1}, ex aequatione $f_i = a_i$ expressa per $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, satisfaciebat i aequationibus (α.) §. 11. At si ope aequationum

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad \ldots \quad f_{i-1} = a_{i-1}$$

non $p_1, p_2, \ldots p_i$ per reliquas quantitates $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, sed, quemadmodum in theoremate I. §. 6 factum est, e primis i quantitatum

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$$

unaquaeque per insequentes exhibetur, ita ut ex aequatione $f = a$ exprimatur p_1 per p_2, p_3 etc., e $f_1 = a_1$ exprimatur p_2 per p_3, p_4 etc., e $f_2 = a_2$ exprimatur p_3 per p_4, p_5 etc.: tum vidimus initio huius commentationis numerum i aequationum (α.) cum totidem convenire sequentibus:

(α.)
$$\left\{\begin{aligned}
0 = {} & -\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_3} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
& + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+3}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\
0 = {} & -\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
& + \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+3}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = {} & -\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
& + \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+3}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}.
\end{aligned}\right.$$

Quae sunt ipsae aequationes (*a.*) in theoremate I. propositae, siquidem theoremate illo statuitur $k = i+1$ atque loco i successive ponuntur num 1, 2, 3, ... i. E quibus ipsis aequationibus (*a.*) supra aequationes (*α.*) d ductae sunt.

Introductis functionibus f, quae in solutione problematis singulae constantibus aequanti aequationibus supra adhibitis forma communis $[f_i, f_k] = 0$ *conciliatur.*

31.

Multiplicemus i aequationes praecedentes per

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i-1}}\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_1}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i-1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i},$$

atque sola in eas differentialia partialia functionum $f, f_1, f_2, \ldots f_i$ introducam quod per aequationes $f = a$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, ... $f_i = a_i$ licet. Quo fa induent aequationes praecedentes hanc formam:

$$(a'.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f}{\partial p_3}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_3} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ 0 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_3} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_4} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_i} + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quum functiones f_k quantitates $p_1, p_2, \ldots p_k$ non involvant, has aequationes omnes in eandem formam redigere licet sequentem:

$$(a''.)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \quad - \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ 0 = \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \quad - \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f_1}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \quad - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}. \end{array}\right.$$

Termini enim qui, ut eadem forma aequationum omnium sit, addendi erant, sua sponte evanescunt. E notatione antecedentibus proposita aequationes praecedentes sic exhibentur:

$$(a'''.)\quad 0 = [f_i, f],\quad 0 = [f_i, f_1],\quad 0 = [f_i, f_2],\quad \ldots\quad 0 = [f_i, f_{i-1}].$$

Consideremus unam aequationum praecedentium:

$$0 = [f_i, f_k],$$

in qua k quemcunque e numeris $0, 1, 2, \ldots i-1$ designat. Designante n unum e numeris $0, 1, \ldots i-1$, continebit sive altera sive utraque functio f_i, f_k constantem a_n. Cuius in locum si ponimus functionem f_n constanti illi aequivalentem, abit expressio $[f_i, f_k]$ in hanc:

$$[f_i, f_k] + \frac{\partial f_i}{\partial a_n}[f_n, f_k] + \frac{\partial f_k}{\partial a_n}[f_i, f_n],$$

quum expressio accedens

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_n}\frac{\partial f_k}{\partial a_n}[f_n, f_n]$$

sponte evanescat. Sed ex aequationibus $(a'''.)$ et e systemate aequationum, quae ipsum systema aequationum $(a'''.)$ antecedunt, sive ad minores ipsius i valores pertinent, sequitur:

$$[f_n, f_k] = 0, \qquad [f_i, f_n] = 0.$$

Unde videmus, aequationem

$$[f_i, f_k] = 0$$

eandem formam retinere, si in formandis differentialibus partialibus functionum f_i, f_k in locum constantis alicuius a_n, quam functiones illae involvunt, functio

aequivalens substituitur f_n. Si n unus e numeris k, $k+1$, ... $i-1$, altera functio f_k constantem a_n non continet, quo igitur casu in demonstratione praecedente ponendum est $\frac{\partial f_k}{\partial a_n} = 0$, sive termini in $\frac{\partial f_k}{\partial a_n}$ multiplicati rejiciendi.

Prorsus eadem ratione demonstratur, aequationem

$$[f_i, f_n] = 0$$

immutatam manere, si in altera functionum f_i, f_k retineatur a_n, in altera in locum eius functio f_n substituatur.

Si eodem modo cum reliquis constantibus arbitrariis agis, quas functiones f_i, f_k involvunt, deducis propositionem generalem: *aequationes*

$$[f_i, f_k] = 0$$

adhuc valere, si in altera aut in utraque functione f_i, f_k ante differentiationes partiales instituendas in locum unius vel plurium vel omnium constantium arbitrariarum, quas continent, functiones aequivalentes substituantur, seu generalius, quascunque mutationes functiones f_i, f_k ante differentiationes partiales factae auxilio aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, ... $f_{m-1} = a_{m-1}$ subeant. Quae propositio etiam e theoremate II. §. 12 derivari potuisset.

E forma allata aequationes §. 14 $[H_i, H_k] = 0$ denuo obtinentur. Systema aequationum differentialium vulgarium, cuius aequationes $H_i = Const.$ sunt integralia.

32.

Si in aequationibus

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

e quaque functione f_i ope aequationum

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{i-1} = a_{i-1}$$

constantes a, a_1, a_2, ... a_{i-1}, quas f_i continet, eliminantur atque functio inde proveniens vocatur

$$H_i = f_i,$$

obtinemus aequationes

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

in quibus H_i sunt functiones ipsarum p_1, p_2, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m absque ullis constantibus arbitrariis. Pro illis autem functionibus aequationes

$$[H_i, H_k] = 0$$

identicae evadere debent, quum expressio ad laevam nullam constantem arbitrariam contineat. Quas aequationes supra §. 14. iam dedi, ubi H_i, h_i loco H_{i-1}, a_{i-1} scriptum erat. Adhibitis functionibus H propositio antecedens sic enunciari potest:

valere aequationem

$$[H_i, H_k] = 0,$$

quaecunque variabilium p_1, p_2, *etc. e functionibus* H_i, H_k *ope aequationum* $H = a$, $H_1 = a_1$, ... $H_{m-1} = a_{m-1}$ *ante differentiationes partiales instituendas eliminatae sint, sive quascunque mutationes ope harum aequationum functiones* H_i, H_k *subierint.*

Ex aequationibus

$$[H, H_1] = 0, \quad [H, H_2] = 0, \quad \ldots \quad [H, H_{m-1}] = 0$$

sequitur, aequationes

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

esse m integralia systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 \; : \ldots : \quad dp_m \; =$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

in quibus H eadem est functio, quam supra f vocavi. Unde etiam aequationes

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1},$$

quae cum aequationibus illis conveniunt, tamquam systema m aequationum integralium systematis aequationum differentialium vulgarium praecedentis considerari possunt. Sed quum systema hoc habeat $2m-1$ integralia, restat ut reliqua $m-1$ indagentur. Eum in finem observo sequentia.

Systematis aequationum differentialium vulgarium propositi reliqua integralia investigantur.

33.

Aequationes $f = a$, $f_1 = a_1$, ... $f_{m-1} = a_{m-1}$ sive aequationes $H = a$, $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, ... $H_{m-1} = a_{m-1}$ ita formatae sunt, ut, expressis earum beneficio ipsis p_1, p_2, ... p_m per q_1, q_2, ... q_m, expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum. Valores illi ipsarum p_1, p_2, ... p_m praeter variabiles q_1, q_2, ... q_m adhuc involvunt constantem a et constantes arbitrarias a_1, a_2, ... a_{m-1}. Secundum quarum unam a_i, si expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiamus, prodibit expressio

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m,$$

quae et ipsa differentiale completum esse debet. Iam vero ex aequatione

$$f = a,$$

quae est aequatio differentialis partialis proposita. sequitur differentiando eundem a_i:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a_i}=0.$$

Unde ex aequationibus differentialibus vulgaribus propositis

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n = \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

deducere possumus aequationem:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i}dq_1-\frac{\partial p_2}{\partial a_i}dq_2-\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial a_i}dq_n=0.$$

in qua est expressio ad laevam differentiale completum. Quo integrato posque in locum ipsius a_i valoribus ejus $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ prodeunt $n-1$ integr nova quaesita:

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_1}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_1}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial a_1}dq_n\right\}=b_1,$$

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_2}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial a_2}dq_n\right\}=b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_{n-1}}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_{n-1}}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial a_{n-1}}dq_n\right\}=b_{n-1},$$

in quibus sunt $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ constantes novae arbitrariae.

Systema aequationum differentialium vulgarium ita propositum est, differentialia variabilium datis quantitatibus existant proportionalia. Fingi differentiale auxiliare dt, cuius ope quantitates proportionales evadant inter aequales, unde systema propositum fit:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_n}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Hinc fit

$$\frac{\partial p_1}{\partial a}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_n}{\partial a}dq_n$$
$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a}\right\}dt.$$

At differentiando aequationem propositam $f=a$ secundum a prodit:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a}=1.$$

unde aequatio antecedens abit in sequentem:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a} dq_m = dt,$$

cuius pars ad laevam est differentiale exactum. Hinc videmus, ut quantitas auxiliaris t obtineatur per solas quadraturas, non esse necessarium, ut omnes quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per unam ex earum numero exprimantur, atque tum ex una aequationum differentialium propositarum, ex. gr. ex aequatione

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}$$

valor ipsius t per quadraturam eruatur, sed expressis $p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, $\ldots$ $f_{m-1} = a_{m-1}$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$, haberi t per aequationem

$$t + b = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a} dq_m \right\},$$

in qua b est nova constans arbitraria.

De antecedentibus theorema conditur. Designatis illis quae desiderabantur integralibus per $f_i' = b_i$, vel $H_i' = b_i$, expressionum $[H_i, H_k']$, $[H_i', H_k']$ valores indagantur.

34.

Si V est integrale aequationis differentialis partialis propositae,

$$f(q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m) = a,$$

quale invenitur per aequationem

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\},$$

in qua $p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, $\ldots$ $f_{m-1} = a_{m-1}$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressae sunt, licet integralia aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

hoc modo repraesentare,

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = t + b,$$

in quibus a, a_1, a_2, ... a_{m-1}, b, b_1, b_2, ... b_{m-1} *sunt* $2m$ *constantes arbitrariae.* Unde integratio completa est.

Theorema praecedens gravissimum, iam olim a me demonstratum, est amplificatio alius theorematis ab ill. *Hamilton* inventi, quo primus aequationes differentiales vulgares dynamicas ad aequationes differentiales partiales revocavit. Sed ille binas simul adhibuit aequationes differentiales partiales, quo praeter necessitatem problema intricabatur. Eratque eo tempore integratio aequationis differentialis partialis $f = a$ problema multo difficilius et quod multo plures postulabat integrationes quam integratio systematis aequationum differentialium vulgarium, quae simul sunt aequationes differentiales dynamicae

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Qua de re tum temporis vir ill. multo magis aequationum differentialium partialium integrationem quam dynamicam promovisse existimandus erat. Neque vero viri illustris merito derogatum esse volo. Summum enim videtur quum in omni scientia tum in analysi mathematica nexus novus patefactus inter ea, quae nullo vinculo videbantur coniuncta.

Statuamus, designante i unum quemlibet e numeris 0, 1, 2, ... $m-1$:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m \right\} = f_i',$$

et quemadmodum supra (§. 32.) suppositum est, e functione f_{i-1} prodire functionem H_{i-1}, si in functione illa loco constantium a, a_1, a_2, ... a_{i-2}, quas continet, ponantur functiones H, H_1, H_2, ... H_{i-2}, ita iam supponamus, e functionibus f_{i-1}' prodire functiones H_{i-1}', si loco constantium a, a_1, a_2, ... a_{m-1}, quas continent, ponantur respective functiones H, H_1, H_2, ... H_{m-1}, ita ut etiam m functiones H_1', H_2', ... H_{m-1}' sint ipsarum q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m functiones, constantes a, a_1, ... a_{m-1} non continentes. Designantibus i, binos quoslibet e numeris 0, 1, 2, ... $m-1$, erat *identice*

$$[H_i, H_k] = 0;$$

iam valorem expressionum

$$[H_i, H_k']$$

investigemus.

Ac primum observo, in expressione illa loco H_k' poni posse functionem f_k', e qua H_k' obtinetur ponendo loco a, a_1, a_2, ... a_{m-1} functiones f_1, f_2, ... f_{m-1}. Etenim, si eandem substitutionem facimus, postquam e

pressiones $[H_i, f_k']$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a}$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a_1}$, ... $\frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}$ formatae sunt, *identice* fit, sicuti e formatione expressionis $[H_i, H_k']$ facile sequitur:

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] + \frac{\partial f_k'}{\partial a}[H_i, H] + \frac{\partial f_k'}{\partial a_1}[H_i, H_1] + \cdots + \frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}[H_i, H_{m-1}].$$

Unde, expressionibus

$$[H_i, H], \quad [H_i, H_1], \quad [H_i, H_2], \quad \ldots \quad [H_i, H_{m-1}]$$

identice evanescentibus, quum insuper functio f_k' solas $q_1, q_2, \ldots q_m, a, a_1, \ldots a_{m-1}$ neque quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ contineat:

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] = -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial f_k'}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial f_k'}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f_k'}{\partial q_m}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_k} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a_k}\right\}.$$

Unde habetur

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] = -\frac{\partial H_i}{\partial a_k},$$

siquidem in functione H_i in locum variabilium $p_1, p_2, \ldots p_m$ ad formandum differentiale partiale $\frac{\partial H_i}{\partial a_k}$ substituuntur eorum valores, qui obtinentur ex aequationibus:

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

sive erit identice $[H_i, H_k'] = 0$, *quoties* i *et* k *diversi sunt, atque* $= -1$, *si* $i = k$.

Quod attinet ad valores expressiónum

$$[H_i', H_k'],$$

primum observo, haberi per easdem considerationes, quibus antecedentibus usi sumus,

$$[H_i', H_k'] = [H_i', f_k'],$$

eamque aequationem identicam fieri, si post formatam expressionem $[H_i', f_k']$ in ea loco ipsarum $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ restituamus functiones $H, H_1, \ldots H_{m-1}$. Quod si in fine operationum signis nostris indicatarum efficimus, fit identice:

$$[H_i', f_k'] = [f_i', f_k'] + \frac{\partial f_i'}{\partial a}[H, f_k] + \frac{\partial f_i'}{\partial a_1}[H_1, f_k'] + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial a_{m-1}}[H_{m-1}, f_k'];$$

porro antecedentibus vidimus, si i et k diversi sint, fieri:

$$[H_i, f_k'] = 0;$$

expressio autem $[f_i', f_k']$ in nihilum abit, quum neque f_i' neque f_k' quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ contineant; unde, si i et k inter se diversi sunt, fit

$$[H_i', H_k'] = [H_i', f_k'] = 0.$$

Aequatio autem $[H_i', H_k'] = 0$, si $i = k$, sponte patet. *Jam igitur aequationum differentialium*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

2m integralia inventa

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$
$$H' = b + t, \quad H_1' = b_1, \quad H_2' = b_2, \quad \ldots \quad H_{m-1}' = b_{m-1}$$

ita comparata sunt, ut tribuendo ipsis i et k valores 1, 2, 3, ... *m, identice sit:*

$$[H_i, H_k] = 0, \qquad [H_i', H_k'] = 0,$$

ac si i et k inter se diversi sunt,

$$[H_i, H_k'] = 0,$$

denique

$$[H_i, H_i'] = -1.$$

Quae sunt propositiones in theoria nostra *fundamentales.*

De modificatione formularum praecedentium, qua opus est, si functio f ipsam continet variabilem t, quae supra tanquam auxiliaris spectabatur.

35.

Supposuimus, in systemate aequationum propositarum:

$$(1.) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

functionem f ipsas tantum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ neque quantitatem t continere. Sed facile iste casus, quo f etiam t continet, ad praecedentem revocatur. Statuamus enim in praecedentibus variabilibus $q_1, q_2, \ldots q_m$ succedere variabilem t, unde posito

$$\frac{\partial V}{\partial t} = u$$

etiam statuendum erit:

$$(2.) \qquad dV = u\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m.$$

Insuper in aequatione differentiali partiali proposita loco f scribatur $u+f$, ita ut evadat illa:

$$(3.) \qquad u+f=a \quad \text{sive} \quad \frac{\partial V}{\partial t}=-f+a\ ^*),$$

functione f involvente ipsam t neque vero ipsam u. His statutis mutationibus formulae propositae sponte ad casum patent, quo f ipsam t involvit. Nam quum sit

$$\frac{\partial(u+f)}{\partial u}=1, \qquad \frac{\partial(u+f)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(u+f)}{\partial q_i}=\frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial(u+f)}{\partial p_i}=\frac{\partial f}{\partial p_i},$$

aequationes differentiales vulgares, quarum integrationem vidimus §§. 32, 33 pendere ab integratione aequationis differentialis partialis propositae, hae evadunt:

$$dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad du : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m \quad =$$
$$1 : \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial t} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

quae eaedem sunt atque aequationes (1.), accedente, si placet, aequatione

$$(4.) \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Praeter aequationem propositam $u+f=a$ sint

$$(5.) \qquad f_1=a_1, \quad f_2=a_2, \quad \ldots \quad f_m=a_m$$

integralia aequationum (1.) per methodum a me supra propositam indaganda. E quibus ipsae u, p_1, p_2, $\ldots$ p_m per t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m ita determinantur, ut fiat

$$u\,dt+p_1\,dq_1+p_2\,dq_2+\cdots+p_m\,dq_m$$

expressio integrabilis. Numerus aequationum (5.) unitate maior est atque in quaestionibus praecedentibus, quum variabilibus independentibus q_1, q_2, $\ldots$ q_m accesserit nova variabilis t. Ac per regulam praescriptam erit $f_1=a_1$ integrale quodcunque aequationum (1.); in quibus quum neque u neque constans a obveniat, etiam f_1 neque u neque a continebit, idemque valebit de functionibus f_2, f_3, $\ldots$ f_m. Quarum f_i erit functio ipsarum p_i, p_{i+1}, $\ldots$ p_m, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, a_1, a_2, $\ldots$ a_{i-1}. Si in f_2 loco a_1 restituimus functionem f_1, prodeat $f_2=H_2$; si in f_3 loco a_1, a_2 restituimus functiones f_1, H_2, prodeat $f_3=H_3$, et ita porro. Unde generaliter fit H_i functio ipsarum p_1, p_2, $\ldots$ p_m, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m a constantibus arbitrariis vacua, quae ope aequationum $f_1=a_1$, $f_2=a_2$, $\ldots$ $f_{i-1}=a_{i-1}$

*) Constantem a per totam disquisitionem sequentem etiam $=0$ ponere licet.

ipsi f_i aequalis evadit. In locum igitur aequationum (5.) hae quoque adhiberi possunt:

$$(6.) \qquad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_m = a_m,$$

quae et ipsa erunt aequationum (1.) integralia. Inventis aequationibus (5.) earumque ope expressis $f, p_1, p_2, \ldots p_m$ per quantitates $t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m$, habentur e §. 34 reliqua integralia aequationum (1.):

$$(7.) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_1} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} = b_1, \\ \frac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_2} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial V}{\partial a_m} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_m} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_m} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_m} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_m} dq_m \right\} = b_m, \end{cases}$$

designantibus $b_1, b_2, \ldots b_m$ novas constantes arbitrarias.

Aequatio, quae e §. 34 addi potest,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = t + b,$$

hic mere identica evadit; nam quum expressiones ipsarum $f, p_1, p_2, \ldots p_m$ constantem a non contineant, atque sit $u = a - f$, eruimus differentiando (2.) secundum a et integrando:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int dt,$$

quod aequationem praecedentem sponte suppeditat.

Si in functionibus $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial a_m}$ loco ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m$ ponimus functiones $H_1, H_2, \ldots H_m$, functiones inde prodeuntes vocemus rursus $H_1', H_2', \ldots H_m'$. Tum, pro his functionibus sicuti supra, valebunt aequationes

$$[H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, H_k'] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0,$$
$$[H_i, H_i'] = -1,$$

si quidem notatione

$$[\varphi, \psi]$$

semper designamus expressionem

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Quamquam enim casu, quem hic consideramus, variabilibus

$$q_1, \quad q_2, \quad \cdots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \cdots \quad p_m$$

accedunt variabiles

$$t, \quad u,$$

unde videri posset, aequationibus praecedentibus accedere debere terminos e differentiatione secundum has variabiles provenientes: nullo tamen modo in formandis expressionibus

$$[H_i, H_k], \quad [H_i, H_k'], \quad [H_i', H_k']$$

opus est, ut habeamus respectum ad variabilem t functiones H_i, H_i' afficientem atque etiam respectu huius differentiationes partiales instituamus. Nam quum functiones H_i, H_i' non contineant ipsam u, evanescunt termini, qui addendi forent,

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial u} - \frac{\partial H_k}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$
$$\frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u}.$$

Si ponitur

$$u + f = H,$$

solis expressionibus

$$[H, H_i], \quad [H, H_i']$$

termini accedunt provenientes e differentiatione respectu ipsarum t, u instituta. Habetur enim, quum f ipsam u non involvat,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1,$$

unde termini addendi valores obtinent sequentes:

$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u} - \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i}{\partial t},$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u} - \frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i'}{\partial t}.$$

Unde sequitur:

$$[H, H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = [f, H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = 0,$$
$$[H, H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = [f, H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = 0.$$

Quae formulae etiam inde deducuntur, quod sint aequationes

$$H_i = \text{Const.}, \quad H_i' = \text{Const.}$$

integralia aequationum differentialium propositarum,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

ita ut, substitutis his aequationibus, identice fiat

$$\frac{dH_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dH_i'}{dt} = 0,$$

quod formulas praecedentes suppeditat. Si ponimus analogiam notationis adhibitae servantes

$$t = \frac{\partial V}{\partial a} = H',$$

manent aequationes

$$[H', H_i] = 0, \qquad [H', H_i'] = 0,$$

quum functiones H', H_i, H_i' ipsam a non involvant, ideoque termini addendi evanescant. Quod attinet ad expressionem

$$[H, H'],$$

observo eam evanescere, quia H' nullam continet variabilium

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_n$$

sed unicam t.

Applicatio in aequationes dynamicas. Quae sub Lagrangiana forma proponuntur.

36.

In formam aequationum differentialium vulgarium propositarum

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

aequationes differentiales dynamicas revocari posse omnibus casibus, quibus principium minimae actionis sive principium conservationis virium vivarum locum habeat, primus, quantum scio, ill. *Hamilton* docuit. Adstruam primum formulas dynamicas generales *Lagrangianas* ex iisque deinde formulas propositas deducam.

Proponantur n puncta materialia, quorum massae m_1, m_2, ... m_n; sint x_i, y_i, z_i coordinatae orthogonales puncti, cuius massa m_i; ac sollicitetur punctum illud secundum directiones axium coordinatarum viribus X_i, Y_i, Z_i, erunt problemata mechanica; quae hic consideramus et pro quibus dicta principia valent, ea, in quibus expressio

$$\Sigma m_i \{X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i\},$$

extensa ad omnia n corpora, est differentiale completum. Cuius integrale si

vocatur U, erunt aequationes differentiales dynamicae contentae hac aequatione symbolica

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \delta U,$$

cui satisfieri debet per variationes omnes virtuales δx_i, δy_i, δz_i, sive per variationes conditiones non turbantes, quibus n puncta materialia subiecta sunt. Id quod docuit olim ill. *Lagrange* combinando principium *d'Alemberti* cum principio velocitatum virtualium. Posito autem

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

fit aequatio illa symbolica:

$$\frac{d\Sigma m_i\{x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i\}}{dt} - \Sigma m_i\{x_i'\delta x_i' + y_i'\delta y_i' + z_i'\delta z_i'\} = \delta U,$$

quae, posita semissi virium vivarum

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\{x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i'\} = T,$$

sic etiam repraesentari potest:

$$\frac{d\Sigma m_i\{x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i\}}{dt} = \delta(U+T).$$

Statuendo $U+T=R$, hanc aequationem ita exhibeamus:

$$\delta R = \frac{d\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right\}}{dt},$$

id quod licet, quum U quantitates x_i', y_i', z_i' omnino non contineat. Exprimamus $3n$ quantitates x_i, y_i, z_i per m alias quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ sitque rursus

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt},$$

facile probatur expressa etiam R per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ fieri:

$$(1.) \quad \begin{cases} \Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right\} = \\ \frac{\partial R}{\partial q_1'}\delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'}\delta q_m. \end{cases}$$

Habetur enim

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right\} =$$

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right\}\delta q_1 +$$

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right\}\delta q_2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right\}\delta q_m.$$

At quum sit

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_m}q_m',$$

erit

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \text{ ac similiter } \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \frac{\partial z_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

unde

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right\} =$$

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i'}{\partial q_k'}\right\} = \frac{\partial R}{\partial q_k'},$$

ideoque

$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right\} = \Sigma_k\frac{\partial R}{\partial q_k'}\delta q_k,$$

quod probandum erat. Habemus igitur, expressa R per novas quantitates q_k, q_k', aequationem

$$\delta R = \frac{d\left\{\frac{\partial R}{\partial q_1'}\delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'}\delta q_m\right\}}{dt}.$$

Si π est numerus aequationum conditionalium, quibus $3n$ coordinatae satisfacere debent, fieri debet m aut $=3n-\pi$ aut $>3n-\pi$. Si $m=3n-\pi+\nu$, designante ν numerum positivum, habetur inter quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ numerus ν aequationum conditionalium, unde totidem emergunt inter variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ aequationes conditionales. Ac primum quidem, existente $m=3n-\pi$, quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se invicem independentes sunt ideoque variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ prorsus arbitrariae. Hoc igitur casu ex aequatione praecedenti symbolica hoc fluit aequationum differentialium systema:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = \frac{d\frac{\partial R}{\partial q_1'}}{dt}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = \frac{d\frac{\partial R}{\partial q_2'}}{dt}, \quad \cdots \quad \frac{\partial R}{\partial q_m} = \frac{d\frac{\partial R}{\partial q_m'}}{dt}.$$

Hac forma aequationes differentiales dynamicae iam in editione prima ***Mechanicae Lagrangianae*** propositae inveniuntur.

Forma Hamiltoniana aequationum dynamicarum derivatur; quae cum systemate supra considerato congruit. Theorema VI. de tertio integrali e binis quibuslibet inveniendo applicatur in systema dynamicum.

37.

At ill. *Poisson* in laudatissima commentatione de *Variatione Constantium* (Journal de l'Ecole Polyt. Cah. XV) loco quantitatum q_1', q_2', ... q_m' alias in formulas dynamicas introduxit,

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'}.$$

Quibus ipsis variabilibus adhibitis in locum functionis R ill. *Hamilton* novam introduxit functionem:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial R}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} q_m' - R \\ &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - R. \end{aligned}$$

Qua functione per q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m expressa, ubi simul has omnes quantitates variamus, obtinemus:

$$\begin{aligned} \delta H = \; & q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \cdots + q_m' \delta p_m \\ & - \frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial R}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial R}{\partial q_m} \delta q_m. \end{aligned}$$

Evanescit enim expressio

$$\begin{aligned} & p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \cdots + p_m \delta q_m' \\ & - \left\{ \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m' \right\}. \end{aligned}$$

Expressio ipsius δH inventa iam suppeditat differentialia partialia functionis H secundum novas variabiles sumta sequentia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2', \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = q_m', \\ & \frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial R}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial R}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial q_m} = -\frac{\partial R}{\partial q_m}, \end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis, vice versa R e functione H obtinetur per formulam:

$$\begin{aligned} R &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - H \\ &= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H. \end{aligned}$$

Introductis igitur quantitatibus $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ ut variabilibus, aequatio inventa symbolica iam haec evadit:

$$\delta\left\{p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H\right\} = \frac{d\{p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m\}}{dt}.$$

Facta variatione et differentiatione et substitutis valoribus

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

venit in aequationis praecedentis utraque parte expressio

$$p_1\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_m},$$

qua reiecta, hanc nanciscimur formulam:

$$(1.)\quad \begin{cases} -\left\{\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right\} = \\ \quad \frac{dp_1}{dt}\delta q_1+\frac{dp_2}{dt}\delta q_2+\cdots+\frac{dp_m}{dt}\delta q_m. \end{cases}$$

Si $m=3n-\pi$, designante π numerum aequationum conditionalium, quibus coordinatae punctorum materialium satisfacere debent, quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se invicem prorsus independentes sunt, earumque variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ omnes arbitrariae. Quo casu ex (1.) fluunt aequationes differentiales *dynamicae* in variabilibus $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ exhibitae:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{dq_1}{dt}, & \frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{dq_2}{dt}, & \ldots & \frac{\partial H}{\partial p_m}=\frac{dq_m}{dt}, \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{dp_1}{dt}, & -\frac{\partial H}{\partial q_2}=\frac{dp_2}{dt}, & \ldots & -\frac{\partial H}{\partial q_m}=\frac{dp_m}{dt}. \end{cases}$$

Qua forma primus ill. *Hamilton* aequationes *dynamicas* exhibuit, neque parum inde commodi in Mechanicam Analyticam redundasse existimo. Observaverat iam l. c. ill. *Poisson*, valores ipsarum $\frac{dq_i}{dt}=q_i'$ per quantitates q_i, p_i expressos ita comparatos esse, ut habeatur

$$\frac{\partial q_i'}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k'}{\partial p_i},$$

(Journal de l'Ecole Polyt. Cah. XV, pag. 275), quae ad finem sibi propositum sufficiebant formulae. E formulis (2.) statim etiam sequentes fluunt:

$$\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}=-\frac{\partial p_k'}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i'}{\partial q_k}=\frac{\partial p_k'}{\partial q_i},$$

siquidem rursus $p_i'=\frac{dp_i}{dt}$ ponimus.

Forma *Hamiltoniana* aequationum differentialium dynamicarum eadem est atque systematis aequationum differentialium vulgarium, cuius integrationem supra docui §§. 33, 34.

Si in aequatione supra (§. 36 (1.)) probata

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i \right\} = \Sigma_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} \delta q_k,$$

in locum ipsorum δx_i, δy_i, δz_i, δq_k simul ponimus x_i', y_i', z_i', q_k', quod licet, quum aequationes conditionales supponantur ipsam t non involvere, eruimus:

$$\Sigma \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial R}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial R}{\partial z_i'} z_i' \right\} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k'.$$

Unde substituto valore $R = T + U$, quum sit

$$\frac{\partial R}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i', \qquad \frac{\partial R}{\partial y_i'} = \frac{\partial T}{\partial y_i'} = m_i y_i', \qquad \frac{\partial R}{\partial z_i'} = \frac{\partial T}{\partial z_i'} = m_i z_i',$$

prodit:

$$2T = \Sigma \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k' = H + R = H + T + U.$$

In applicationibus igitur ad *dynamicam* est functio H ipsi $T-U$ aequalis, unde aequatio

$$H = h,$$

in qua h est constans arbitraria, est ipsa aequatio *conservationem virium vivarum* concernens.

Docet theorema VI. supra probatum, si habentur aequationum (2.) duo alia integralia quaecunque

$$\varphi = a, \qquad \psi = b,$$

in quibus a et b sunt constantes arbitrariae ipsas φ et ψ non afficientes, inde generaliter deduci integrale novum:

$$\text{Const.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Exponitur problema de expressione $[\varphi, \psi]$ per maiorem variabilium numerum exhibenda, inter quas aequationes conditionales datae sunt.

38.

Quum propter rei utilitatem tum propter egregiam eius difficultatem tum quia accurate examinare iuvat, quaecunque spectant ad expressionem $[\varphi, \psi]$ tantis

proprietatibus gaudentem, investigabo hic expressionem, quam induit $[\varphi, \psi]$, si in ea loco quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se independentium restituuntur $3n$ coordinatae x_1, y_1, z_1, quae datis conditionibus quibuscunque satisfacere debent, sive generalius introducitur maior numerus variabilium $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, inter quas numerus $\mu - m$ relationum locum habent. In hoc problemate supponitur, ipsas φ et ψ ut functiones ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ et quantitatum

$$\xi_1' = \frac{d\xi_1}{dt}, \quad \xi_2' = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \ldots \quad \xi_\mu' = \frac{d\xi_\mu}{dt}$$

datas esse, atque ipsius $[\varphi, \psi]$ expressio investiganda talis esse debet, ut nullae in ea inveniantur quantitates, ad quarum formationem efficiendam datae esse debent relationes, quibus quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ et $q_1, q_2, \ldots q_m$ aliae per alias determinantur, ita ut in formula investiganda nulla variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m$ vestigia remaneant. Iam problema accuratius exponam.

Problema propositum hoc est:

Sint inter μ quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ datae aequationes conditionales numero $\mu - m$,

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \text{etc.},$$

unde etiam inter ipsas $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ habentur aequationes

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu' = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu' = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Quum inter μ quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ datae sint $\mu - m$ aequationes conditionales, exprimi possunt quantitates illae per m quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se invicem independentes. Unde posito

$$q_i = \frac{dq_i}{dt},$$

exprimi etiam possunt quantitates $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ ope formularum

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}q_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}q_m.$$

Sit etiam R functio quaecunque ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque

$$H = \xi_1\frac{\partial R}{\partial \xi_1} + \xi_2\frac{\partial R}{\partial \xi_2} + \cdots + \xi_\mu\frac{\partial R}{\partial \xi_\mu} - R,$$

positoque

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} = \omega_1, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_2} = \omega_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu} = \omega_\mu$$

exprimatur H per $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$, qua expressione differentiata respective secundum $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ sequitur ex analysi supra tradita vice versa obtineri quantitates ipsis $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ aequales, sive fieri

$$\xi_1' = \frac{\partial H}{\partial v_1}, \quad \xi_2' = \frac{\partial H}{\partial v_2}, \quad \ldots \quad \xi_\mu' = \frac{\partial H}{\partial v_\mu}.$$

Unde cognita expressione illa ipsius H, habetur expressio ipsius R per $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ ope formulae

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H.$$

Substitutis iam expressionibus ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ atque expressionibus ipsarum $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$, exhibeatur R per has $2m$ quantitates; quo facto demonstratur prorsus eadem ratione atque formula (1.) §. 36 demonstrata est, haec aequatio:

$$\xi_1' \frac{\partial R}{\partial \xi_1'} + \xi_2' \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} + \cdots + \xi_\mu' \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} =$$
$$q_1' \frac{\partial R}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial R}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial R}{\partial q_m'}.$$

Unde expressa R per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$, functio H per easdem quantitates sic exhibetur:

$$H = q_1' \frac{\partial R}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial R}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial R}{\partial q_m'} - R.$$

Posito

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'},$$

exprimatur H per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; qua expressione differentiata secundum $p_1, p_2, \ldots p_m$, vice versa obtinentur quantitates ipsis $q_1', q_2', \ldots q_m'$ aequales sive habentur aequationes

$$q_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q_2' = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad q_m' = \frac{\partial H}{\partial p_m}.$$

Unde erit

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H$$
$$= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H.$$

His positis sint φ, ψ binae functiones *quaecunque* ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, \xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$; quibus expressis per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ ac deinde

ope aequationum

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m}$$

iisdem expressis per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, formetur expressio

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Functiones φ, ψ etiam per quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ exhiberi possunt. Quibus cognitis expressionibus, quaeritur:

„*datis expressionibus trium functionum H, φ, ψ per quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ atque aequationibus, quae inter ipsas $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ locum habent,*

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \text{etc.},$$

atque [illegible] quibus quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ per aliquas independentes [illegible] determinantur, invenire valorem expressionis

$$(\varphi, \psi).“$$

Quod est problema propositum.

§. [illegible]

[illegible]

sint porro v_i^0 quantitates, in quas ipsae v_i abeunt, si loco R ponitur

$$R+\lambda F+\mu\Phi+\cdots+\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$$

Tum erit

$$v_i = v_i^0-l_i-L_i;$$

porro posito

$$\lambda^0=\Sigma\xi_i\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}-\lambda, \qquad \mu^0=\Sigma\xi_i\frac{\partial\mu}{\partial\xi_i}-\mu, \quad \ldots$$

$$\lambda_1^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_i'}, \qquad \mu_1^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\mu_1}{\partial\xi_i'}, \quad \ldots$$

abit H in expressionem

$$H^0 = H+\lambda^0 F+\mu^0\Phi+\cdots+\lambda_1^0 F'+\mu_1^0\Phi'+\cdots,$$

omissis quantitatibus se mutuo destruentibus

$$\lambda_1\left\{\Sigma_i\xi_i\frac{\partial F'}{\partial\xi_i}-F'\right\}, \quad \mu_1\left\{\Sigma_i\xi_i\frac{\partial\Phi'}{\partial\xi_i'}-\Phi'\right\}, \quad \ldots$$

atque in termino primo H loco ipsarum v_i positis valoribus $v_i^0-l_i-L_i$. Quibus adhibitis expressionibus sine multo negotio invenitur, quod fieri debet,

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0}=\frac{\partial H}{\partial v_i}=\xi_i.$$

Rejectis enim terminis evanescentibus fit

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0} = \frac{\partial H}{\partial v_i}-\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\left(\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}+\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}\right)+\lambda_1^0\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}+\mu_1^0\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}+\cdots;$$

porro, quum omnes solarum ξ_i functiones secundum v_i^0 differentiatae evanescant,

$$\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}=\Sigma_k\xi_k\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k\frac{\partial F}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\mu}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}+\cdots=0,$$

$$\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}=\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}=\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\mu_1}{\partial\xi_k'}+\cdots$$

$$=\lambda_1^0\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}+\mu_1^0\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}+\cdots$$

Unde rejectis terminis se mutuo destruentibus, prodit formula demonstranda:

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0}=\frac{\partial H}{\partial v_i},$$

quae valet pro quolibet indicis i valore. Apposui antecedentia, quamquam ad propositi problematis solutionem non necessaria, sicuti innui, ad dilucidationem rei; prona enim est in hac quaestione ad errores via.

Etiam functiones φ et ψ variis modis mutari possunt addendo iis terminos in F, Φ, ... F', Φ', ... multiplicatos, sive expressis φ, ψ, sicuti requiritur, per quantitates ξ_i, v_i, addendo terminos multiplicatos in $F, \Phi, \ldots A, B, \ldots$ siquidem per $A, B, \ldots$ designamus valores ipsarum $F', \Phi', \ldots$ per quantitates ξ_i, v_i exhibitos, scilicet expressiones,

$$A = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$
$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quae expressiones quum evanescere debeant, sunt $A = 0$, $B = 0$, ... aequationes conditionales, quae inter ipsas ξ_i, v_i locum habent.

Ante omnia bene tenendum est, e variis quidem formis, quas functio R per aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ... $F' = 0$, $\Phi' = 0$, ... induere potest, quamcunque eligi posse; sed hac electa atque ratione praescripta inde deductis expressionibus ipsarum v_i per quantitates ξ_i, ξ_i' atque functionis H per quantitates ξ_i, v_i, supponi, has expressiones per aequationes illas non denuo mutari. Alioqui enim in infinitos errores delaberemur.

Expressionum quaesitarum formatio ad duarum summarum determinationem revocatur.

40.

Adstruam primum aequationes, quibus quantitates v_i determinantur per ipsas q_i et p_i, siquidem data est expressio functionis H per ipsas ξ_i et v_i atque expressiones quantitatum ξ_i per ipsas q_i. Habemus

$$\delta\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}\delta q_m,$$

ideoque

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i}\delta\xi_i = \delta q_1 \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_1} + \delta q_2 \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_2} + \cdots + \delta q_m \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}.$$

Quum habeatur

$$\frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k},$$

quia in expressione ipsius ξ_i' per quantitates q_k, q_k' ipsa q_k' tantum lineariter obvenit atque in $\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}$ ducta, fit:

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} = \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial R}{\partial q_k'},$$

itemque:

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i}\delta\xi_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 - \frac{\partial R}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 - \cdots - \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu$$
$$= \frac{\partial R}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial R}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial R}{\partial q_m}\delta q_m.$$

Quum vero positum sit

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i} = v_i, \qquad \frac{\partial R}{\partial q_i} = p_i,$$

aequatio praecedens sic repraesentari potest:

$$(1.) \qquad v_1\delta\xi_1 + v_2\delta\xi_2 + \cdots + v_\mu\delta\xi_\mu = p_1\delta q_1 - p_2\delta q_2 - \cdots - p_m\delta q_m.$$

In aequatione (1.) variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ prorsus arbitrarine sunt, dum inter variationes $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots \delta\xi_m$ locum habent $\mu - m$ conditiones:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 - \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 - \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0.$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 - \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Qua de re quantitates p_i quidem per ξ_i, v_i, sed non quantitates v_i per ipsas p_i ex aequatione (1.) determinantur. Habentur enim e (1.) tantum m aequationes:

$$p_1 = v_1\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \cdots + v_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1},$$
$$p_2 = v_1\frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + v_2\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \cdots + v_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_m = v_1\frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + v_2\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \cdots + v_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}.$$

Ad determinationem completam ipsarum v_i praeter m aequationes praecedentes adhiberi debent $\mu - m$ aequationes sequentes:

$$(2.) \quad \begin{cases} 0 = A = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ 0 = B = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Conditis aequationibus (1.) et (2.), quibus quantitates v_i determinantur, iam accedamus ad formationem propositam expressionis quantitatis $[\varphi, \psi]$ per ipsas ξ_k, v_k.

Fit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\xi_\mu}{\partial q_i}$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_i},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial p_i} = \frac{\partial\psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial p_i}+\frac{\partial\psi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial p_i}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}.$$

His duabus expressionibus multiplicatis habetur valor ipsius $\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$, e quo permutando φ et ψ valor ipsius $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ prodit; quibus subductis, habetur valor expressionis

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i},$$

e quo, tribuendo ipsi i valores $1, 2, \ldots m$ et summando, prodit expressio ipsius $[\varphi, \psi]$ sequens:

$$(3.)\quad \begin{cases} [\varphi,\psi] = \Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}, \\ \qquad +\Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right\}\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}. \end{cases}$$

In qua expressione sub signo summatorio tribuendi sunt indicibus k et k' valores $1, 2, \ldots \mu$, atque indici i valores $1, 2, \ldots m$. Summam posteriorem sic quoque exhibere licet:

$$\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right\}.$$

Iam pro quibuslibet datis valoribus ipsarum k et k' investigemus valorem summarum simplicium:

$$\Sigma_i\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} = \frac{\partial\xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1}+\frac{\partial\xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m},$$
$$\Sigma_i\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right\} = \frac{\partial v_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1}+\frac{\partial v_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial v_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1}-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m}.$$

In quibus summis non ipsae $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ sed tantum differentialia eorum partialia secundum quantitates p_i, q_i sumta inveniuntur. Iam quaeram, quomodo binae summae per solas $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ exhibeantur.

Summarum propositarum prior determinatur.

41.

Sunt quantitates ξ_i prorsus determinatae functiones ipsarum q_i; nam etsi ξ_i maiore sint numero ipsis q_i quae per illas expressae supponuntur, possunt tamen advocatis aequationibus $F=0$, $\Phi=0$ etc. inter ipsas ξ_i datis, vice versa ipsae ξ_i per q_i modo prorsus determinato exprimi. Quae expressiones ipsas p_i nullo modo involvunt. Contra sunt ipsae v_i functiones ipsarum q_i et p_i per (1.) et (2.) determinatae. Quibus observatis, differentietur (1.) secundum p_i: prodit:

$$(4.)\qquad \delta q_i = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\delta\xi_1 - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\delta\xi_2 - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\delta\xi_\alpha .$$

Ex hac aequatione et ex aequationibus (2.) et ipsis secundum p_i differentiatis nanciscimur aequationes sequentes, quarum numerus est α et e quibus ipsarum $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}, \frac{\partial v_2}{\partial p_i}, \ldots \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}$ valores determinari possunt:

$$(5.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial q_1}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial q_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial q_i}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial q_m}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_1} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_2} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_\alpha}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_1} - \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_2} - \cdots - \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_\alpha}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Eiusmodi aequationum linearium eruimus m systemata ponendo loco i numeros 1, 2, ... m; quae systemata multiplicemus respective per

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m}$$

et post multiplicationem factam instituamus additionem. Tum adhibita notatione

sequente, in qua k et k' inter se diversi accipiuntur:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1}+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m} = k_{k'}, \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1}+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m} = 1+k_k, \end{cases}$$

invenimus:

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1}k_\mu, \\ 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2}k_\mu, \\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}k_\mu, \\ -\frac{\partial A}{\partial v_k} = \frac{\partial A}{\partial v_1}k_1+\frac{\partial A}{\partial v_2}k_2+\cdots+\frac{\partial A}{\partial v_\mu}k_\mu, \\ -\frac{\partial B}{\partial v_k} = \frac{\partial B}{\partial v_1}k_1+\frac{\partial B}{\partial v_2}k_2+\cdots+\frac{\partial B}{\partial v_\mu}k_\mu, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Harum aequationum resolutio revocari potest ad aliarum, quarum numerus tantum est $\mu-m$ sive idem atque aequationum conditionalium $F=0$, $\Phi=0$, etc. Habetur enim:

$$(8.)\quad \begin{cases} k_1 = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_1}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}+\cdots, \\ k_2 = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_2}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}+\cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_\mu = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}+\cdots, \end{cases}$$

multiplicatoribus $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$, ..., quorum numerus est $\mu-m$, determinatis per aequationes:

$$(9.)\quad \begin{cases} -\frac{\partial A}{\partial v_k} = a_1\lambda_1^{(k)}+a_2\lambda_2^{(k)}+\cdots, \\ -\frac{\partial B}{\partial v_k} = b_1\lambda_1^{(k)}+b_2\lambda_2^{(k)}+\cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

siquidem:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}, \\ a_2 = b_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} \\ \quad = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ b_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aequalitas coefficientium a_2 et b_1 facile patet ex expressionibus ipsarum A et B §. 40 (2.) propositis. Invenitur enim utriusque expressionis idem valor:

$$a_2 = b_1 = \Sigma_{k,k'} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}},$$

ipsis k et k' valoribus 1, 2, ... μ tributis. Generaliter aequationes lineares (9.), ad quarum resolutionem investigatio ipsarum k_1, k_2, ... k_μ reducta est, ita comparatae sunt, ut series verticales et horizontales coefficientium eaedem sint. Quae porro coefficientes tantum ab ipsis functionibus F, Φ, etc. neque ab indice k vel k' pendent; index tamen k afficit aequationum (9.) partes constantes. Posito igitur:

$$(11.)\quad \begin{cases} -\lambda_1^{(k)} = \Lambda_{1,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + \Lambda_{1,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \\ -\lambda_2^{(k)} = \Lambda_{2,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + \Lambda_{2,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

eruis m systemata eiusmodi formularum tribuendo ipsi k valores 1, 2, ... m, ipsis coefficientibus Λ immutatis manentibus. Ceterum e noto theoremate algebraico fit

$$\Lambda_{a,b} = \Lambda_{b,a},$$

sive etiam in aequationibus (11.) coefficientium series horizontales eaedem sunt atque verticales.

Agitur de altera summa determinanda.

42.

E duabus summis simplicibus

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}, \qquad \Sigma_i \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right\},$$

quarum valores §. 40. vidimus investigandos esse, alteram antecedentibus deter-

minavi seu certe ad alias revocavi quantitates $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$, ... quae per resolutionem $\mu - m$ aequationum linearium inveniuntur. Iam alteram investigemus summam simplicem

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right\},$$

cuius complicatior fit expressio.

Statuamus, e sequentibus μ aequationibus linearibus:

$$(12.) \quad \begin{cases} M_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} u_\mu, \\ M_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2} u_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_m = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} u_\mu, \\ N_1 = \frac{\partial A}{\partial v_1} u_1 + \frac{\partial A}{\partial v_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} u_\mu, \\ N_2 = \frac{\partial B}{\partial v_1} u_1 + \frac{\partial B}{\partial v_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} u_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

obtineri resolutione facta incognitarum u_1, u_2, ... u_μ valores sequentes:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_{1,1} M_1 + C_{1,2} M_2 + \cdots + C_{1,m} M_m + D_{1,1} N_1 + D_{1,2} N_2 + \cdots, \\ u_2 &= C_{2,1} M_1 + C_{2,2} M_2 + \cdots + C_{2,m} M_m + D_{2,1} N_1 + D_{2,2} N_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\mu &= C_{\mu,1} M_1 + C_{\mu,2} M_2 + \cdots + C_{\mu,m} M_m + D_{\mu,1} N_1 + D_{\mu,2} N_2 + \cdots \end{aligned}$$

Si in aequationibus (12.) ponitur $M_i = 1$, reliquae autem omnes M_1, M_2, ... M_m, N_1, N_2, ... praeter M_i evanescunt, aequationes illae eaedem fiunt atque aequationes (5.), e quibus valores ipsarum $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}$, $\frac{\partial v_2}{\partial p_i}$, ... $\frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}$ petendi sunt, sive fit

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} = C_{1,i}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial p_i} = C_{2,i}, \quad \ldots \quad \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} = C_{\mu,i},$$

vel generaliter

$$\frac{\partial v_k}{\partial p_i} = C_{k,i}.$$

Unde facta aequationum (12.) *resolutione obtinentur incognitarum* u_1, u_2, ... u_μ

valores sequentes:

$$(13.)\quad \begin{cases} u_1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_1}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial p_m} M_m + D_{1,1} N_1 + D_{1,2} N_2 + \cdots, \\ u_2 = \frac{\partial v_2}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_2}{\partial p_m} M_m + D_{2,1} N_1 + D_{2,2} N_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\mu = \frac{\partial v_\mu}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_m} M_m + D_{\mu,1} N_1 + D_{\mu,2} N_2 + \cdots \end{cases}$$

His praeparatis, differentiemus aequationes binas, quae ex (1.) (§. 40.) sequuntur:

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

$$p_{i'} = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_{i'}},$$

priorem secundum $q_{i'}$, posteriorem secundum q_i. Id quod licet, quum substitutis ipsorum ξ_k, v_k valoribus per p_k, q_k expressis, aequationes illae identicae evadere debent. Facta differentiatione, partes ad laevam ut ab ipsis q_i, $q_{i'}$ vacuae evanescunt, partes ad dextram commune nanciscuntur aggregatum

$$v_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial q_i \partial q_{i'}} + v_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial q_i \partial q_{i'}} + \cdots + v_\mu \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial q_i \partial q_{i'}}.$$

Duabus expressionibus evanescentibus aequiparatis et aggregato communi reiecto, nanciscimur:

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \frac{\partial v_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \frac{\partial v_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} \frac{\partial v_\mu}{\partial q_{i'}} = \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \frac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_{i'}} \frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Ex hac aequatione obtinemus numerum m aequationum tribuendo ipsi i' valores $1, 2, \ldots m$, quarum aequationum una valori $i = i'$ respondens adeo identica est. Porro differentiando aequationes $A = 0$, $B = 0$, etc. secundum q_i, obtinemus:

$$(15.)\quad \begin{cases} -\frac{\partial A}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = \\ \frac{\partial A}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}, \\ -\frac{\partial B}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = \\ \frac{\partial B}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial B}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si ponimus

$$M_{i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}\frac{\partial v_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}\frac{\partial v_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_{i'}}$$

atque

$$N_1^{(i)} = -\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

$$N_2^{(i)} = -\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

. . . . . .

systema m aequationum (14.) iunctum systemati aequationum (15.) convenit cum aequationibus (12.), siquidem μ quantitates $\frac{\partial v_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial v_2}{\partial q_i}$, ... $\frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}$ pro incognitis u_1, u_2, ... u_μ habentur. Hinc secundum formulas (13.) nanciscimur:

$$\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = u_k = \frac{\partial v_k}{\partial p_1}M_1 + \frac{\partial v_k}{\partial p_2}M_2 + \cdots + \frac{\partial v_k}{\partial p_m}M_m + D_{k,1}N_1^{(i)} + D_{k,2}N_2^{(i)} + \cdots$$

Statuamus

$$(16.) \qquad \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1} + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m} = (k')_k,$$

ita ut $(k)_{k'} - (k')_k$ sit altera summa §. 40 investigatu proposita. Qua adhibita notatione, poterit aequatio praecedens hoc modo repraesentari:

$$(17.) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}(1)_k + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}(2)_k + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}(\mu)_k + D_{k,1}N_1^{(i)} + D_{k,2}N_2^{(i)} + \cdots$$

Substitutis ipsorum $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, etc. valoribus positoque

$$(18.) \qquad \begin{cases} w_1^{(k)} = (1)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_1} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_1} - \cdots, \\ w_2^{(k)} = (2)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_2} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ w_\mu^{(k)} = (\mu)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} - \cdots, \end{cases}$$

aequatio praecedens in hanc abit:

$$(19.) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}w_1^{(k)} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}w_\mu^{(k)}.$$

E qua nanciscimur m formulas tribuendo ipsi i valores 1, 2, ... m. E quibus

ut obtineatur rursus systema aequationum linearium formae aequationum (1 investigemus adhuc valorem expressionum

$$N_1 = \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)},$$
$$N_2 = \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quod hoc modo fieri potest.

43.

Habetur

$$\frac{\partial A}{\partial v_1}(1)_k + \frac{\partial A}{\partial v_2}(2)_k + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu}(\mu)_k = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = \Sigma_{k'} \Sigma_i \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i}.$$

Differentiando autem aequationem $A = 0$ secundum q_i fit:

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} = -\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i},$$

unde

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} k'_k.$$

Erat autem

$$k'_k = \lambda_1^{(k')} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + \lambda_2^{(k')} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots$$

Ponendo igitur:

$$(20.) \quad \begin{cases} A_1 = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_1^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \lambda_1^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \lambda_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \lambda_1^{(\mu)}, \\ A_2 = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_2^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \lambda_2^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

fit

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots$$

Eodem modo ponendo

$$(21.) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1} \lambda_1^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} \lambda_1^{(\mu)}, \\ B_2 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1} \lambda_2^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} \lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

fit

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} (k')_k = -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} - B_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - B_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots$$

et similes aequationes pro qualibet aequatione conditionali obtinentur.

Statuamus

$$(22.) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial A}{\partial v_\mu} = \alpha_1, \\ \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial B}{\partial v_\mu} = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

porro

$$(23.) \quad \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial A}{\partial v_\mu} = \beta_1, \\ \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial B}{\partial v_\mu} = \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Tum multiplicando aequationes (9.) §. 41 per $\frac{\partial A}{\partial \xi_k}$, $\frac{\partial B}{\partial \xi_k}$, ... et summationem instituendo respectu indicis k, nanciscimur aequationum linearium systemata, quibus valores ipsarum $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ determinantur:

$$(24.) \quad \begin{cases} -\alpha_1 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots, \\ -\alpha_2 = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\beta_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots, \\ -\beta_2 = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quodlibet systema tot continet aequationes lineares totque incognitas quot datae sunt inter quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ aequationes conditionales $F=0$, $\Phi=0$, ... Resolutione facta nanciscimur ipsorum $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ valores:

$$(25.) \quad \begin{cases} -A_1 = \Lambda_{1,1}\alpha_1 + \Lambda_{1,2}\alpha_2 + \cdots, \\ -A_2 = \Lambda_{2,1}\alpha_1 + \Lambda_{2,2}\alpha_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -B_1 = \Lambda_{1,1}\beta_1 + \Lambda_{1,2}\beta_2 + \cdots, \\ -B_2 = \Lambda_{2,1}\beta_1 + \Lambda_{2,2}\beta_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

quibus in formulis coefficientes $A_{i,i'}$ iidem sunt atque in (11.) §. 41. Antequ ulterius progrediar, valores ipsorum D et ipsi ad quantitates A revocandi su Eum in finem in aequationibus (12.) pono

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad u_2 = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad u_\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu},$$

unde fit

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad \ldots \quad M_i = 0,$$
$$N_1 = a_1, \quad N_2 = b_1, \quad \ldots,$$

quibus substitutis ex aequationibus (13.) obtinetur:

$$(26.) \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = a_1 D_{k,1} + b_1 D_{k,2} + \cdots$$

Eodemque modo fit:

$$(27.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = a_2 D_{k,1} + b_2 D_{k,2} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aequationibus (26.), (27.) resolutis prodeunt valores quaesiti:

$$(28.) \qquad \begin{cases} D_{k,1} = A_{1,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{1,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ D_{k,2} = A_{2,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{2,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

His valoribus simulque ipsorum A_1, A_2, ... valoribus (25.) substitutis aequatione:

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} (k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots,$$

simulque revocando, quod supra §. 41 adnotavi, esse

$$A_{a,b} = A_{b,a},$$

eruimus:

$$(29.) \qquad \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} (k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,1} \alpha_1 + D_{k,2} \alpha_2 + \cdots,$$

eodemque modo fit:

$$(30.) \qquad \Sigma_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} (k')_k = -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1} \beta_1 + D_{k,2} \beta_2 + \cdots$$

Hinc. substituto e (18.) valore:

$$w_{k'}^{(k)} = (k')_k - D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - \cdots,$$

prodit:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} &= \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\
&= -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\alpha_1 + D_{k,2}\alpha_2 + \cdots \\
&\qquad - D_{k,1}\alpha_1 - D_{k,2}\beta_1 - \cdots \\
\Sigma_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} &= \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\
&= -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\beta_1 + D_{k,2}\beta_2 + \cdots \\
&\qquad - D_{k,1}\alpha_2 - D_{k,2}\beta_2 - \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Statuamus, quaecunque sint A et B variabilium $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ ***functiones,***

$$(31.) \quad \begin{cases} [A, B]' = \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} \\ \qquad - \dfrac{\partial A}{\partial v_1}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial A}{\partial v_2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots - \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}, \end{cases}$$

qua in notatione plagulam superposui, ut expressionem distinguam a similiter respectu variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ **formata.**

Eruentur hac nova notatione ad formulas praecedentes applicata expressiones quaesitae:

$$(32.) \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2}[A, B]' + \cdots, \\ N_2 = \dfrac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}[B, A]' + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quae aequationes iunctae m **aequationibus, quae tribuendo ipsi** i **valores 1, 2, ...** m **obtinentur e (19.), suppeditant systema aequationum linearium ipsis (12.) simile.**

Quarum resolutio suppeditat e (13.):

$$w_{k'}^{(k)} = (k)_{k'} + D_{k',1}N_1 + D_{k',2}N_2 + \cdots$$

Unde substitutis praecedentibus ipsorum $N_1, N_2, \ldots$ **valoribus (32.) atque e**

(18.) valore

$$w_{k'}^{(k)} = (k')_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - \cdots,$$

prodit altera summa §. 40 investigatu proposita

$$(33.)\quad \begin{cases} (k')_k - (k)_{k'} = D_{k,1}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',1}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k} + \cdots \\ \qquad + (D_{k',1}D_{k,2} - D_{k,1}D_{k',2})[A, B]' + \cdots \end{cases}$$

Quae est expressio quaesita, e qua si ipsorum D valores (28.) substituis variabiles $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ prorsus, quod postulabatur, abierunt. Observo in formula (33.) terminos

$$(D_{k',1}D_{k,2} - D_{k,1}D_{k',2})[A, B]'$$

inveniri tot, quot binarum aequationum conditionalium habentur combinationes, sive numerum $\frac{(\mu-m)(\mu-m-1)}{2}$. Unde si *unica* tantum aequatio conditionalis datur, eiusmodi non habentur termini. Eo casu habetur, si $F=0$ est aequatio conditionalis:

$$a.k_{k'} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial A}{\partial v_k},$$

$$a.\{(k')_k - (k)_{k'}\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial A}{\partial \xi_k},$$

ubi

$$A = \Sigma\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial H}{\partial v_k}, \qquad a = \Sigma\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\cdot\frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}},$$

siquidem in altera summa ipsi k, in altera ipsis k et k' valores 1, 2, ... μ tribuuntur.

Formulae antecedentes applicantur ad casum, quo ipsae $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ coordinatas orthogonales punctorum materialium significant.

44.

Sit $\mu = 3n$ simulque quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n}$ designent $3n$ coordinatas punctorum motorum orthogonales, sitque puncti, cuius una coordinata per ξ_k denotatur, massa m_k, ita ut quantitatum $m_1, m_2, \ldots m_\mu$ ternae ad idem punctum pertinentes inter se aequales existant. Tum erit, designante U solarum ξ_k functionem ab ipsis ξ_k' vacuam atque T semissem virium vivarum,

$$H = T - U = \tfrac{1}{2}\Sigma m_k \xi_k' \xi_k' - U,$$

$$v_k = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} = m_k \xi_k',$$

atque

$$A = \Sigma \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \cdot \xi_k', \qquad B = \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \cdot \xi_k', \qquad \ldots$$

$$a_1 = \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad a_2 = b_1 = \Sigma \frac{1}{m_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}, \quad b_2 = \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad \ldots$$

$$m_k \lambda_{k'}^{(k)} = A_{k',1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{k',2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots,$$

$$m_k k_{k'} = m_{k'} k_k' = A_{1,1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} + A_{1,2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right\}$$

$$+ A_{2,2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \cdots$$

. . . . . .

Adnoto data occasione, fieri pro assignata ipsarum ξ_k significatione

$$m_k . k_{k'} = m_{k'} . k_k'$$

sive

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_{k'}'}{\partial p_i} = \Sigma_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_k'}{\partial p_i}$$

quod facile hoc modo intelligitur. Est

$$\xi_{k'}' = \Sigma_{i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} \cdot q_{i'}', \qquad \xi_k' = \Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} \cdot q_{i'}',$$

unde

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_{k'}'}{\partial p_i} = \Sigma_{i,i'} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}'}{\partial p_i},$$

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_k'}{\partial p_i} = \Sigma_{i,i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q_{i'}'}{\partial p_i}.$$

Est autem

$$q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad q_{i'}' = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}},$$

unde

$$\frac{\partial q_{i'}'}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i'}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}},$$

sive expressio $\frac{\partial q_{i'}'}{\partial p_i}$ indicibus i et i' commutatis immutata manet. Unde altera summarum appositarum duplicium, scribendo i' loco i atque i loco i', in alteram abit, sive binae inter se aequales existunt, q. d. e.

De usu functionum A in determinandis multiplicatoribus Lagrangianis.

45.

Quantitatibus $A_{a,b}$, quibus antecedentibus usi sumus, etiam ***multiplicatores Lagrangiani*** determinantur, qui formandis aequationibus differentialibus dynamicis inserviunt, quoties inter variabiles, quae punctorum materialium positionem determinant, aequationes conditionales habentur. Ad quas formandas aequationes differentiales, adhibeo formulam symbolicam §. 37 (1.) propositam, in qua, ut $q_1, q_2, \ldots q_m$ semper variabiles independentes designent, loco $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_1, p_2, \ldots p_m$ scribo $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$. Quo facto aequatio illa haec fit:

$$(1.) \quad 0 = \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + \frac{dv_1}{dt}\right\}\delta\xi_1 + \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_2} + \frac{dv_2}{dt}\right\}\delta\xi_2 + \cdots + \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} + \frac{dv_\mu}{dt}\right\}\delta\xi_\mu.$$

Inter variationes $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, etc. habentur aequationes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu &= 0,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,
\end{aligned}$$

siquidem rursus $F = 0$, $\Phi = 0$, etc. sunt aequationes conditionales inter quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ propositae. Per regulam notam aequationes praecedentes in multiplicatores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ductas aequationis (1.) alteri parti addo et terminos in singulas variationes ductos evanescere statuo. Quo facto aequationes differentiales inter variabiles $t, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ obtinentur sequentes, insuper aequationibus $\xi_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}$ advocatis:

$$(2.) \quad \begin{cases}
\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_1}, & \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \cdots,\\
\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_2}, & \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - \cdots,\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\xi_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\mu}, & \frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} - \cdots.
\end{cases}$$

Quibus aequationibus adiungendae sunt ipsae aequationes conditionales

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \ldots$$

et quae ex earum differentiatione sequuntur:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \ldots\ldots$$

His postremis iterum differentiatis et substitutis e (2.) ipsorum $\frac{d\xi_i}{dt}$, $\frac{dv_i}{dt}$ valoribus obtinemus:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1}+\frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu}\\
-&\frac{\partial A}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-\frac{\partial A}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial A}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\cdots,\\
&\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1}+\frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}\\
-&\frac{\partial B}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-\frac{\partial B}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial B}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

siquidem hic $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ eaedem sunt quantitates atque §. 41., (10.). Unde, si advocamus notationem §. 43., (31.) propositam, eruimus valores multiplicatorum sequentes:

$$(3.)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \mathcal{A}_{1,1}[A,H]'+\mathcal{A}_{1,2}[B,H]'+\cdots,\\ \lambda_2 = \mathcal{A}_{2,1}[A,H]'+\mathcal{A}_{2,2}[B,H]'+\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Unde e §. 43., (28.) aequationes differentiales dynamicae fiunt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-D_{1,1}[A,H]'-D_{1,2}[B,H]'-\cdots,\\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-D_{2,1}[A,H]'-D_{2,2}[B,H]'-\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}-D_{\mu,1}[A,H]'-D_{\mu,2}[B,H]'-\cdots \end{cases}$$

e quibus iam multiplicatores sunt eliminati.

Ope summarum supra inventarum ipsa expressio $[\varphi,\psi]$ *formatur.*

46.

Formulam (3.), §. 40:

$$[\varphi,\psi] = \Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}+\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right\}$$

e notationibus supra adhibitis §. 41., (6.) atque §. 42., (16.) sic exhibere possumus:

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{c} [\varphi,\psi] = \\ \Sigma_k\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}+\Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{k'} \\ +\Sigma_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\{(k)_{k'}-(k')_k\}. \end{array}\right.$$

Qua aequatione, si ipsorum $k_{k'}$ atque $(k)_{k'}-(k')_k$ valores supra inventi substituuntur, prodit ipsius $[\varphi,\psi]$ expressio investigatu proposita, in qua variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m$ vestigia nulla inveniuntur.

Summarum, e quibus expressio antecedens componitur, secundae et tertiae transformationes sequentes adiungo.

Habetur e §. 41., (8.):

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{k'} = \\
&\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\left\{k_1\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+k_\mu\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\} \\
&-\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\left\{k_1\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+k_2\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+k_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\} \\
&=\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_1^{(k)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k} \\
&-\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial\xi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_1^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} \\
&+\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_2^{(k)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k} \\
&-\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_2^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

sive etiam:

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{k'} = \\ \Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\{\lambda_1^{(k)}[F,\psi]'+\lambda_2^{(k)}[\Phi,\psi]'+\cdots\} \\ -\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\{\lambda_1^{(k)}[F,\varphi]'+\lambda_2^{(k)}[\Phi,\varphi]'+\cdots\}. \end{array}\right.$$

Habetur porro e §. 43., (33.):

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\{(k')_k-(k)_{k'}\} = \\ \Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}D_{k,1}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\frac{\partial A}{\partial\xi_k}-\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}D_{k,1}.\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial A}{\partial\xi_k} \\ +\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}D_{k,2}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\frac{\partial B}{\partial\xi_k}-\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}D_{k,2}.\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial B}{\partial\xi_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -[A,B]'\left\{\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}D_{k,1}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}D_{k,2}-\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}D_{k,2}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial v_k}.D_{k,1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Fit autem e §. 43., (28.):

$$\Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} = \Lambda_{k',1}\Sigma_k\frac{\partial F}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\Lambda_{k',2}\Sigma_k\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots,$$

$$\Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} = \Lambda_{k',1}\Sigma_k\frac{\partial F}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}+\Lambda_{k',2}\Sigma_k\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}+\cdots$$

sive

$$(4.)\quad \begin{cases} \Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} = \Lambda_{k',1}[F,\varphi]'+\Lambda_{k',2}[\Phi,\varphi]'+\cdots, \\ \Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} = \Lambda_{k',1}[F,\psi]'+\Lambda_{k',2}[\Phi,\psi]'+\cdots \end{cases}$$

His formulis si utimur et advocatis (11.) §. 41. aequationem (2.) sic repraesentare licet:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{k'} = \\ -\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}.\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial A}{\partial v_k}-\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}.\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial B}{\partial v_k}-\cdots \\ +\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial A}{\partial v_k}+\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}.\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial B}{\partial v_k}+\cdots \end{cases}$$

Formulis (3.) et (5.) substitutis in (1.) prodit:

$$(6.)\quad \begin{cases} [\varphi,\psi]-[\varphi,\psi]' = \\ -[\varphi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}-[\varphi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}-\cdots \\ +[\psi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[\psi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots \\ +[A,B]'\left\{\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}.\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}-\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}.\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quae formula generalis satis difficilis erat investigatu.

Expressio inventa per varias eius proprietates verificatur.

47.

Quantitas per quam in §. antecedente ipsam $[\varphi, \psi]$ expressi et quam denotabo per

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} \Xi = {} & [\varphi,\psi]' - [\varphi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - [\varphi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \cdots \\ & + [\psi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + [\psi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + \cdots \\ & + [A,B]'\left\{\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

variis gaudere debet proprietatibus memorabilibus, quae simul varias expressionis inventae verificationes suppeditant. Ac primum non mutetur eius valor necesse est, si in locum functionum φ, ψ ponatur

$$\varphi + \lambda F + \mu\Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi + \lambda_1 F + \mu_1\Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots,$$

designantibus λ, μ, λ', μ', λ_1, μ_1, λ_1', μ_1', ... quascunque ipsarum ξ_i, v_i functiones. Valor enim quantitatis $[\varphi, \psi]$, cui expressio Ξ aequalis inventa est, ea mutatione nullo modo afficitur. Quae expressionis Ξ proprietas ex ipsa eius formatione facile patebit, si haec alia propositio antea demonstrata erit. *expressionem Ξ, posita in locum alterutrius functionum φ, ψ una e functionibus F, Φ, ..., A, B, ..., quaecunque sit altera functio, evanescere.* Quae propositio tantum probanda erit pro casibus, quibus $\varphi = F$ atque $\varphi = A$ ponitur, functione ψ arbitraria manente. Reliqui enim casus, quibus φ functionibus Φ, ..., B, ... aequiparatur, sive quibus φ arbitraria manet atque ψ alicui e functionibus F, Φ, ..., A, B, ... aequalis ponitur, prorsus eodem modo tractari possunt.

Posito $\varphi = F$, evanescunt termini

$$\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

quum functio F solas ξ_i involvat neque quantitates v_i. Hinc posito $\varphi = F$ eruimus:

$$\begin{aligned} \Xi &= [F,\psi]' - [F,A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - [F,B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \cdots \\ &= [F,\psi]' - \Sigma_k\{[F,A]'D_{k,1} + [F,B]'D_{k,2} + \cdots\}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}. \end{aligned}$$

At e formulis (26.), (27.) §. 43, in quibus est

$$a_1 = [F, A]', \quad b_1 = [F, B]', \quad \ldots$$
$$a_2 = [\Phi, A]', \quad b_2 = [\Phi, B]', \quad \ldots$$

habetur:

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F, A]' D_{k,1} + [F, B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi, A]' D_{k,1} + [\Phi, B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Quarum formularum ope abit expressio ipsius Ξ antecedens in hanc:

$$\Xi = [F, \psi]' - \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0.$$

Evanescit igitur Ξ posito $\varphi = F$, q. d. e. Eodem modo demonstratur evanescere Ξ ponendo $\varphi = \Phi$, vel ponendo $\psi = F$, sive $\psi = \Phi$.

Ponamus iam in expressione (1.) $\varphi = A$; quaerendi sunt ante omnia valores quantitatum

$$E_1 = \Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad E_2 = \Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad \ldots\ldots$$

Ad quos inveniendos multiplicentur (2.) per $\frac{\partial A}{\partial v_k}$ atque positis loco k valoribus 1, 2, ... μ instituatur pro singulis aequationibus (2.) summatio; provenit:

$$\Sigma_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F, A]' = [F, A]' E_1 + [F, B]' E_2 + \cdots,$$
$$\Sigma_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi, A]' = [\Phi, A]' E_1 + [\Phi, B]' E_2 + \cdots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Unde obtinetur

$$(3.) \quad E_1 = \Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k} = 1, \quad E_2 = \Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_k} = 0, \quad \ldots$$

ac si aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ... plures duabus datae sunt, evanescunt reliquae omnes similes expressiones $\Sigma_k D_{k,3} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, $\Sigma_k D_{k,4} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, ... Eodem modo probatur fieri

$$\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial v_k} = 1,$$

atque evanescere reliquas omnes quantitates $\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, $\Sigma_k D_{k,3} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, ... Per

aequationes (3.) videmus, ipsam Ξ posito $\varphi = A$ evanescere, quum sit $[A, A]' = 0$, $[A, \psi]' + [\psi, A]' = 0$, ac facile pateat, quemadmodum ea substitutione facta termini in $[A, B]'$ ducti evanescunt, ita si aequationes conditionales plures duabus datae sint, evanescere terminos ductos in expressiones similes, quarum numerus idem est atque numerus combinationum binarum aequationum conditionalium. Eodem modo demonstratur, evanescere Ξ ponendo $\varphi = B$ vel ponendo $\psi = A$ sive $\psi = B$.

Designemus iam expressionem (1.) per

$$\Xi = [\varphi, \psi]'',$$

ac ponamus

$$\varphi^0 = \varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi^0 = \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots$$

Patet e formatione expressionis $[\varphi, \psi]''$, rejiciendo post differentiationes partiales transactas expressiones per quantitates evanescentes $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$ multiplicatas, fieri:

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]''$$
$$= [\varphi^0, \psi]'' + \lambda_1 [\varphi^0, F]'' + \mu_1 [\varphi^0, \Phi]'' + \cdots$$
$$+ \lambda_1' [\varphi^0, A]'' + \mu_1' [\varphi^0, B]'' + \cdots$$

At demonstravi modo, quaecunque sit φ^0 functio, haberi

$$[\varphi^0, F]'' = 0, \quad [\varphi^0, \Phi]'' = 0, \quad \ldots,$$
$$[\varphi^0, A]'' = 0, \quad [\varphi^0, B]'' = 0, \quad \ldots;$$

unde fit

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]''.$$

Eodem modo probatur, reiectis post differentiationes partiales transactas expressionibus per quantitates evanescentes $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$ multiplicatis, fieri

$$[\varphi^0, \psi]'' = [\varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \psi]''$$
$$= [\varphi, \psi]'' + \lambda [F, \psi]'' + \mu [\Phi, \psi]'' + \cdots$$
$$+ \lambda' [A, \psi]'' + \mu' [B, \psi]'' + \cdots.$$

Unde quum probatum sit, quaecunque sit ψ functio, haberi

$$0 = [F, \psi]'' = [\Phi, \psi]'' = \cdots = [A, \psi]'' = [B, \psi]'' = \cdots,$$

fit

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]'' = [\varphi, \psi]'',$$

quod est theorema demonstrandum.

Deinde etiam non mutari debet expressionis Ξ valor, si loco functionis R ponitur $R+\lambda F+\mu\Phi+\cdots+\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$, atque de hac nova functione deducuntur valores ipsarum v_i a praecedentibus diversi et forma valde discrepans functionis H, sicuti §. 39 praecepi. Sed verificatio huius proprietatis, ex ipsa quantitatis Ξ formatione petita, quum molestissima esse videatur, sufficiat rem examinare, si ipsi R tantum termini $\lambda F+\mu\Phi+\cdots$ addantur, quo casu ibidem vidimus, ipsarum v_i valores non mutari, atque functioni H similes tantum terminos accedere.

Demonstremus igitur, quantitatem Ξ non mutare valorem, si in eo loco ipsius H ponatur $H+\lambda F+\mu\Phi+\cdots$, designantibus $\lambda, \mu, \ldots$ quascunque ipsarum ξ_i, v_i expressiones. Qua mutatione functionis H facile patet, etiam ipsas $A, B, \ldots$ similes tantum mutationes subire, ideoque etiam ipsarum $A, B, \ldots$ differentialia partialia secundum quantitates v_i sumta, nec non expressiones $[F, A]', [F, B]', \ldots [\Phi, A]', [\Phi, B]', \ldots$; unde, sicuti e formulis (2.) elucet, etiam quantitates $D_{k,1}$, $D_{k,2}$, etc. alias non mutationes subeunt. Qua de re omnium harum quantitatum valores immutati manebunt. Sed mutabunt valorem expressiones $[\varphi, A]', [A, B]', \ldots$ ac similes. Quae tamen mutationes eae esse debent, ut ipsius Ξ valor immutatus maneat. Quod facile patebit, ubi probatum erit, expressionis Ξ terminorum, qui functione A affecti sunt, aggregatum evanescere, si loco A in iis ponatur F. Tum enim similes quoque propositiones locum habebunt, evanescere idem aggregatum, si loco A ponatur Φ, vel evanescere aggregatum terminorum, qui functione B affecti sunt, ponendo F sive Φ loco B, etc. Quibus iunctis observationi, expressiones huiusmodi $[A, B]'$ evanescere, ubi simul loco A atque B ponantur quaecunque sive eaedem sive diversae e functionibus $F, \Phi, \ldots$, sponte elucet, valorem ipsius Ξ non mutari. Propositio autem, evanescere terminorum ipsius Ξ functione A affectorum aggregatum, si loco A substituatur F, sequitur absque magno negotio ex aequationibus (2.).

De functionibus quibuslibet φ, ψ, per aequationes datas conditionales $F=0$, $\Phi=0$, ... ita transformandis, ut fiat $[\varphi, \psi]=[\varphi, \psi]'$.

48.

Formas, quas functio φ induere potest propter aequationes, quae locum habent, conditionales, semper ita determinare licet, ut *per has ipsas aequationes conditionales* evanescant valores expressionum

$$[F, \varphi]' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$
$$[\Phi, \varphi]' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ac similiter functioni ψ eam formam conciliare licet, ut per aequationes conditionales evanescant valores expressionum $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, ... Sit ipsius φ expressio adhibenda $\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots$; multiplicatores λ', μ', ... semper ita determinare licet, ut evanescant valores quantitatum

$$[F, \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots]', \quad [\Phi, \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots]',$$

seu reiectis terminis in A, B, ... ductis ut evanescentibus, ut fiat

$$[F, \varphi]' + \lambda'[F, A]' + \mu'[F, B]' + \cdots = 0,$$
$$[\Phi, \varphi]' + \lambda'[\Phi, A]' + \mu'[\Phi, B]' + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per formulas similes determinantur multiplicatores λ_1', μ_1', ... ita, ut quantitates

$$[F, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]', \quad [\Phi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'$$

evanescant. Quibus expressionibus $\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots$, $\psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots$, quod licet, loco φ, ψ positis, habemus ipsarum φ, ψ formas tales, pro quibus fiat

$$(1.) \quad \begin{cases} [F, \varphi]' = 0, & [\Phi, \varphi]' = 0, & \ldots, \\ [F, \psi]' = 0, & [\Phi, \psi]' = 0, & \ldots, \end{cases}$$

quod propositum erat.

Inventis ipsarum φ, ψ formis, pro quibus aequationes antecedentes (1.) locum habent, statim sequitur e (28.), §. 43., fieri etiam:

$$(2.) \quad \begin{cases} \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = 0, & \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = 0, & \ldots, \\ \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0, & \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0 & \ldots \end{cases}$$

Unde in expressione ipsius Ξ termini omnes praeter $[\varphi, \psi]'$ evanescunt, sive *fit, quoties* $[F, \varphi]' = 0$, $[\Phi, \varphi]' = 0$, ..., $[F, \psi]' = 0$, $[\Phi, \psi]' = 0$, ... *haec aequatio:*

$$(3.) \quad [\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Quum per aequationes conditionales functiones φ, ψ semper ita transformare liceat, ut conditionibus illis satisfiat, sequitur *datis ipsarum* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ *functionibus binis quibuscunque* φ *et* ψ, *semper per aequationes*

conditionales, quae inter quantitates illas locum habent, formam talem iis conciliari posse, ut fiat:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\\
&-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\\
=&\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\\
&-\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mu}.
\end{aligned}$$

Ex aequationibus (2.) §. antec. facile deduco sequentes:

$$(4.)\quad \begin{cases} [F,\ \varphi]' = [F,\ A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[F,\ B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots, \\ [\Phi,\ \varphi]' = [\Phi,\ A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[\Phi,\ B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quibus comparatis cum iis, quibus antecedentibus multiplicatorum λ', μ', ... **valores** determinabantur, fit:

$$\lambda' = -\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\quad \mu' = -\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\quad \ldots.$$

Unde ***quaecunque sit*** φ ***functio,*** **habemus e (1.):**

$$(5.)\quad \begin{cases} \left[F,\ \varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \left[\Phi,\ \varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Qua de re etiam habetur:

$$\left[F,\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$

$$\left[\Phi,\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Erit igitur e (3.):

$$(6.)\quad [\varphi,\psi] = \Xi =$$

$$\left[\varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]'.$$

Quae expressio nova ipsius Ξ facile convenit cum illa §. 47., (1.), ad quam supra pervenimus, ubi reputas, reiectis terminis in $A, B, \ldots$ ductis ut evanescentibus, fieri pro multiplicatoribus $\lambda', \mu', \ldots \lambda_1', \mu_1', \ldots$ quibuscunque

$$[\varphi+\lambda' A+\mu' B\ldots, \psi+\lambda_1' A+\mu_1' B\ldots]' = [\varphi,\psi]'+\lambda_1'[\varphi, A]'+\mu_1'[\varphi, B]'-\cdots$$
$$+\lambda'[\psi, A]'+\mu'[\psi, B]'-\cdots$$
$$+(\lambda'\mu_1'-\lambda_1'\mu')[A, B]'+\cdots$$

Considerationibus antecedentibus superstrui potest nova methodus, qua expressio ipsius Ξ, supra via satis prolixa inventa, indagetur; quae methodus huic toti quaestioni magnam lucem affundet.

E considerationibus antecedentibus alia via petitur expressionem propositam ipsius $[\varphi, \psi]$ derivandi.

49.

Quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ non sunt functiones prorsus determinatae ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, quippe quibus addi possunt functiones $F, \Phi, \ldots$ in factores arbitrarios ductae. Sic etiam $p_1, p_2, \ldots p_m$ non sunt functiones prorsus determinatae ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$, quippe valoribus ipsarum p_i §. 40 traditis addi possunt functiones $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$ in factores arbitrarios ductae. Hinc, si datur expressio functionis alicuius φ per quantitates ξ_i, v_i, simulque habetur expressio eiusdem functionis φ per quantitates q_i, p_i, quaeri potest, quaenam e variis illis formis valorum quantitatum q_i, p_i eligendae sint, ut ex hac ipsius φ expressione post factas substitutiones illa data proveniat. Iam dico, *si in expressione functionis cuiuslibet φ per quantitates q_i, p_i ipsarum quidem q_i valores formas assumant, quascunque per aequationes $F=0, \Phi=0, \ldots$ assumere possunt; ipsarum vero p_i valoribus ea ipsa forma tribuatur, qua in formis* §. 40 *propositis gaudent, neque ullo modo forma illa mutatur auxilio aequationum $F=0, \Phi=0, \ldots, A=0, B=0, \ldots$ fore ut ea forma functionis φ proveniat, pro qua habetur:*

$$[F, \varphi]' = 0, \quad [\Phi, \varphi]' = 0, \quad \ldots.$$

Fit enim

$$[F, \varphi]' = \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \Sigma_{k,i}\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial v_k}.$$

At quum supponatur, *identice* positum esse e §. 40:

illa suppositione fit

$$\frac{\partial p_i}{\partial v_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}.$$

Quibus substitutis obtinemus:

$$[F, \varphi]' = \Sigma_{k,i} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \Sigma_i \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \Big).$$

Iam vero habetur

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0,$$

quum functio F, substitutis ipsarum ξ_i valoribus per quantitates q_i expressis, identice evanescere debeat. Unde, substitutis in ipsis $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ ipsarum q_i valoribus assumtis per quantitates ξ_i expressis, abire debet expressio

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$$

in aggregatum terminorum in F, Φ, ... ductorum. Unde etiam e formula antecedente sequitur expressionem $[F, \varphi]'$ in tale aggregatum abire, hoc est, *si in functione aliqua* φ *per ipsas* $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_1, \ldots p_m$ *expressa substituuntur loco ipsarum* p_i *valores:*

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

ac deinde loco ipsarum q_i *quaecunque ponuntur functiones ipsarum* ξ_i, *denique adjumento* $\mu - m$ *aequationum* $F = 0$, $\Phi = 0$, ... *exprimuntur etiam quantitates* $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ *per ipsas* ξ_i, *abit functio* φ *in talem expressionem ipsarum* ξ_i, v_i, *ut quantitas*

$$[F, \varphi]' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$

evadat aggregatum terminorum in F, Φ, ... *ductorum ideoque eius valor evanescat.* Eodem modo demonstratur, expressiones $[\Phi, \varphi]'$, $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, etc. in eiusmodi aggregata abire ideoque evanescere. Electis functionibus ipsarum ξ_i, quae in locum ipsarum q_i ponantur, habentur quotientes differentiales partiales $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ per ipsas ξ_i expressae ope aequationum linearium:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
1 &= \frac{\partial q_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
0 &= \frac{\partial q_m}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Si quantitates $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ per aequationes $F=0$, $\Phi=0$, ... in tales expressi rediguntur, ut *identice* sit pro quolibet ipsius i valore

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \qquad \Sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \qquad \ldots$$

functionibus φ talis forma conciliata erit, pro quibus expressiones

$$[F, \varphi]', \qquad [\Phi, \psi]', \qquad \ldots$$

adeo *identice* evanescant. Generaliter autem data quaecunque functio φ aequationes $A=0$, $B=0$, ... in formam redigitur, pro qua expressi $[F, \varphi]'$, $[\Phi, \varphi]'$, ... identice evanescunt, si eliguntur m expressiones a se vicem independentes:

$$w_i = \alpha_i' v_1 + \alpha_i'' v_2 + \cdots + \alpha_i^{(\mu)} v_\mu$$

respectu ipsarum v_k lineares, in qua coefficientes $\alpha_i^{(k)}$ ut tales ipsarum ξ_k functiones determinantur, pro quibus identice fiat

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\alpha_i' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\alpha_i^{(\mu)}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\alpha_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\alpha_i^{(\mu)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Ex. gr., si $\mu - m = 2$ sive si duae tantum adsunt aequationes conditionales sive functiones F, Φ, assumere licet

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + v_3, \\ w_2 &= \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 + v_4, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w_{\mu-2} &= \alpha_{\mu-2} v_1 + \beta_{\mu-2} v_2 + v_\mu, \end{aligned}$$

determinatis α_k, β_k per duas aequationes

$$\alpha_k \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k+2}} = 0,$$

$$\alpha_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k+2}} = 0.$$

Quae facile ad quemlibet numerum aequationum conditionalium sive functionum F, Φ, ... extenduntur. Determinatis functionibus linearibus w_i ita ut dictis conditionibus satisfaciant, eliminari possunt per $\mu - m$ aequationes $A = 0$, $B = 0$, ... quantitates v_1, v_2, ... v_μ e functione φ, ita ut solarum ξ_i, w_i functio evadat. quae erit expressio quaesita.

Ut eruatur expressio ipsius Ξ §. 47 proposita, tantum opus est, ut demonstretur, *quoties*

$$(1.) \quad [F, \varphi]' = 0, \quad [\Phi, \varphi]' = 0, \quad \ldots$$

$$(2.) \quad [F, \psi]' = 0, \quad [\Phi, \psi]' = 0, \quad \ldots$$

fieri

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Vocemus enim φ^0, ψ^0 eas expressiones ipsarum φ, ψ, pro quibus aequationes (1.), (2.) locum habent, sitque

$$[\varphi, \psi] = [\varphi^0, \psi^0]',$$

sequitur e §. 48., fore

$$\varphi^0 = \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$

$$\psi^0 = \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots,$$

ubi

$$\lambda' = -\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \mu' = -\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

$$\lambda_1' = -\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k}, \quad \mu_1' = -\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

neque alias formas induere posse functiones φ^0, ψ^0, nisi quod iis adhuc addi possint termini in F, Φ, ... ducti. Facile autem patet, quum aequationes (1.), (2.) posito $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$ locum habeant, expressionem $[\varphi^0, \psi^0]'$ eius-

modi terminis ipsis φ^0, ψ^0 additis valorem non mutare. Unde eruetur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]' = \Xi$$

q. e. d. Eodem modo probatur, si solae (1.) locum habeant, fore

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'.$$

Propositio autem illa, quoties aequationes (1.), (2.) locum habeant, fore

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]',$$

sic demonstrari potest.

Eadem continuantur. Demonstratur, integrale tertium, quod e binis aequationum dynamicarum integralibus conflare licet, nullo modo pendere a variabilium electione.

50.

Antecedentibus probavi, *pro omnibus formis functionum* φ, ψ, *pro quibus aequationes* (1.) §. praec. *locum habeant, quantitatem* $[\varphi, \psi]'$ *eundem valorem servare.* Unde supponere licet, φ, ψ eas esse functiones, quae ex earum expressionibus per quantitates q_k, p_k prodeunt ponendo loco p_k expressionem

$$p_k = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_k} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_k} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_k},$$

quippe quibus proprietatem illam suppetere §. antec. vidimus. Pro illis autem functionibus φ, ψ habetur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} + \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial v_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k},$$

similesque formulae pro functione ψ locum habent. Unde fit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} =$$

$$\Sigma_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} +$$

$$\Sigma_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}}.$$

In qua expressione indici i valores $1, 2, \ldots \mu$ tribuendi sunt atque nova summatio instituenda; fit autem

$$\Sigma_i \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial q_k}{\partial q_{k'}} = 0, \qquad \Sigma_i \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} = 0,$$

excepto casu, quo in priore formula fit $k = k'$, quo casu illa in unitatem abit; unde evanescunt nova illa summatione termini omnes praeter

$$\Sigma_k\Big(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big)\Sigma_i\frac{\partial q_k}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_k}\Big) = \Sigma_k\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big).$$

Unde prodit

$$\Sigma_i\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\psi}{\partial v_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_i}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\Big) = \Sigma_k\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big),$$

sive

$$[\varphi,\psi]' = [\varphi,\psi],$$

q. d. e.

Prorsus eadem demonstratione facile probatur, *si aequationes conditionales inter ipsas* ξ_i *omnino non habeantur ideoque* $\mu = m$, *semper fieri*

$$[\varphi,\psi] = [\varphi,\psi]'$$

sive

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\\ &-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\\ &=\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\\ &-\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mu}.\end{aligned}$$

Unde patet, *quantitatem* $[\varphi,\psi]$ *nullo modo pendere a variabilium* q_i *electione, sed tantum a natura intima functionum* φ *et* ψ. Unde etiam, si

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

sunt bina integralia systematis aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

earundem aequationum differentialium integrale *tertium, quod datur per aequationem:*

$$[\varphi,\psi] = \text{Const.},$$

nullo modo pendet a variabilium electione.

Theorema de tertio integrali e binis inveniendo extenditur ad casum quo aequationes conditionales inter variabiles intercedunt. — De relationibus quae locum habent inter integralia principium conservationis virium vivarum et principium conservationis centri gravitatis concernentia.

51.

Statuamus, aequationem

$$\varphi = \text{Const.}$$

esse integrale aequationum differentialium vulgarium (2.) §. 45 propositarum.

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \cdots,$$

atque insuper *ita comparatam esse functionem φ, ut identice habeatur*

$$[\varphi, H]' = 0, \quad [\varphi, F]' = 0, \quad [\varphi, \Phi]' = 0, \quad \ldots$$

dico fore, ut habeatur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]',$$

quaecunque sit ψ functio. Nam e theoremate V. §. 26 identice fit, quaecunque sint F, H, φ functiones:

$$[F, [\varphi, H]']' + [\varphi, [H, F]']' + [H, [F, \varphi]']' = 0,$$

unde casu proposito identice erit:

$$[\varphi, [H, F]']' = 0 \quad \text{sive} \quad [\varphi, A]' = 0.$$

eodemque modo obtinetur identice:

$$[\varphi, B]' = 0.$$

Probavi autem §. 48., quoties

$$[\varphi, F]' = 0, \quad [\varphi, \Phi]' = 0, \quad \ldots$$

fieri

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \lambda_2' B + \cdots]',$$

unde sequitur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]' + \lambda_1'[\varphi, A]' + \lambda_2'[\varphi, B]' + \cdots$$

Hinc casu proposito, quo vidimus evanescere $[\varphi, A]'$, $[\varphi, B]'$, ... fit

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

q. d. e.

Ope propositionis antecedentis deduci potest e theoremate VI. hoc theorema:

Theorema VII.

„Sint F, Φ, ... quaecunque quantitatum ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ functiones, atque sit identice:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}=0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

porro identice habeatur:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial H}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$
$$-\frac{\partial H}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}-\frac{\partial H}{\partial v_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial H}{\partial v_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}=0,$$

unde $\varphi = Const.$ fit integrale systematis aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial v_i},\quad \frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \xi_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}-\cdots,$$

in quibus supponamus quantitates ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ subiectas esse aequationibus $F=0$, $\Phi=0$, ...; sit denique $\psi = Const.$ aliud earundem aequationum integrale quodcunque, erit etiam aequatio sequens:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial v_\mu}$$
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}-\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu}=\text{Const.}$$

aequationum differentialium vulgarium propositarum integrale.“

Theorematis praecedentis applicationem faciam ad integralia, quae principia *conservationis arearum* et *conservationis centri gravitatis* concernent.

Designantibus x_i, y_i, z_i coordinatas orthogonales puncti, cuius massa m_i, habentur tria integralia, quae *principium conservationis arearum* concernunt:

$$\text{Const.} = \varphi_1 = \Sigma m_i(y_i z_i' - z_i y_i'),$$
$$\text{Const.} = \varphi_2 = \Sigma m_i(z_i x_i' - x_i z_i'),$$
$$\text{Const.} = \varphi_3 = \Sigma m_i(x_i y_i' - y_i x_i').$$

Quae notum est semper locum habere, si vires puncta systematis sollicitantes sint attractiones vel repulsiones sive mutuae sive versus initium coordinatarum directae, atque insuper systema per conditiones, quibus subiectum est, nullo

modo impediatur, quin libere circa initium coordinatarum rotetur. Quoties unam e quantitatibus x_i, y_i, z_i designat, loco v_k (cf. §. 44) respective ponendum erit $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$. Unde designante ψ aliam quamcunque ipsarum x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' functionem, fit

$$[\varphi_1, \psi]' = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i'} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i'} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ z_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\},$$

ac formulae similes respectu functionum φ_2, φ_3 obtinentur. Casu, quem consideramus, valent conditiones, quae in theoremate VII. postulantur, siquidem pro functione φ unam e functionibus φ_1, φ_2, φ_3 accipimus. Quoties igitur $\psi = \text{Const.}$ et ipsum integrale quodcunque problematis est, e theoremate VII. eruitur:

$$(1.) \quad \begin{cases} \text{Const.} = [\varphi_1, \psi]' = \Sigma \left\{ z_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\}, \\ \text{Const.} = [\varphi_2, \psi]' = \Sigma \left\{ x_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} + x_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\}, \\ \text{Const.} = [\varphi_3, \psi]' = \Sigma \left\{ y_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} - x_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} + y_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\}. \end{cases}$$

Si in his formulis statuimus, quod licet, functionem ψ esse unam ex ipsis functionibus φ_1, φ_2, φ_3, facile invenitur:

$$(2.) \quad \begin{cases} [\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \\ [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \\ [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3. \end{cases}$$

Quoties in problemate mechanico principium conservationis arearum locum habet, satisfit aequationibus identicis, quas in theoremate VII. statuimus, siquidem in theoremate illo loco φ ponitur una e functionibus φ_1, φ_2, φ_3. Has aequationes illae identicae in theoremate VII. propositae hunc ipsum constituunt characterem *conservationis*, e quo principium mechanicum suam traxit appellationem. Hinc formulis praecedentibus theorema VII. applicare possumus, sive designante $\varphi = \text{Const.}$ integrale, quod ad principium conservationis arearum pertinet, atque $\psi = \text{Const.}$ aliud quodcunque integrale problematis mechanici, in quo principium illud valet, erit

$$(3.) \quad [\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Unde e tribus formulis praecedentibus (2.) fluunt etiam tres sequentes:

$$(4.) \quad [\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

In formula (3.) functio φ sive unam e functionibus φ_1, φ_2, φ_3 sive etiam earum functionem quamlibet designare potest.

Videmus e formulis (4.), si regula generalis, secundum quam vidimus e duobus integralibus formari posse tertium, applicetur ad tria integralia, quae principium conservationis arearum suppeditat, haec integralia tantum sese ipsa generare neque in illo casu ea regula ad integralia nova perveniri. Animadverti autem potest, quum secundum regulam illam trium illorum integralium bina quaelibet tertium procreent, eam demonstrare fieri non posse, ut in ullo problemate mechanico duo tantum locum habeant, tertium integrale locum non habeat. Quod hic per propositiones mere analyticas absque ullo considerationum geometricarum auxilio evincitur.

Statuamus

$$\chi_1 = \Sigma m_i x_i', \quad \chi_2 = \Sigma m_i y_i', \quad \chi_3 = \Sigma m_i z_i';$$

constituunt tria integralia

$$\chi_1 = \text{Const.}, \quad \chi_2 = \text{Const.}, \quad \chi_3 = \text{Const.}$$

principium *conservationis centri gravitatis*. Invenitur autem, si loco ψ ponitur in (1.) successive χ_1, χ_2, χ_3:

$$(5.) \quad \begin{cases} [\varphi_1, \chi_1]' = 0, & [\varphi_1, \chi_2]' = \chi_3, & [\varphi_1, \chi_3]' = -\chi_2, \\ [\varphi_2, \chi_1]' = -\chi_3, & [\varphi_2, \chi_2]' = 0, & [\varphi_2, \chi_3]' = \chi_1, \\ [\varphi_3, \chi_1]' = \chi_2, & [\varphi_3, \chi_2]' = -\chi_1, & [\varphi_3, \chi_3]' = 0. \end{cases}$$

Sequitur ex his formulis, quod etiam considerationibus geometricis probari potest, quoties principium conservationis arearum valeat, trium integralium, quae principium conservationis centri gravitatis concernunt, unum quodcunque necessario duo reliqua secum ducere. Si unicum valet integrale $\varphi_1 = \text{Const.}$ e tribus, quae principium conservationis arearum concernunt, hoc et integrale $\chi_1 = \text{Const.}$ aliud non generatur; sed integrale $\varphi_1 = \text{Const.}$ et alterum integralium $\chi_2 = \text{Const.}$, $\chi_3 = \text{Const.}$ alterum procreat. Secundum theorema VII. formulae (5.) etiam valent, si plagulae superscriptae rejiciuntur.

Formulae perturbationum simplicissimae, quae e systemate integralium proposito obtinentur.

52.

Redeamus ad systema aequationum differentialium vulgarium:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \cdots & \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, & \cdots & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Quarum integralia

$$(2.)\quad \begin{cases} f = H = a, & H_1 = a_1, & H_2 = a_2, & \ldots & H_{m-1} = a_{m-1}, \\ H' = b + t, & H_1' = b_1, & H_2' = b_2, & \ldots & H_{m-1}' = b_{m-1} \end{cases}$$

sub forma tali invenire docui §. 34, ut identice sit

$$(3.)\quad [H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, H_k'] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0,$$

excepto casu, quo in expressione $[H_i, H_k']$ fit $i = k$; quippe habetur

$$(4.)\quad [H_i, H_i'] = -1, \quad \text{sive} \quad [H_i', H_i] = +1.$$

Quibus aequationibus fit, ut pro forma sub qua integralia invenimus, etiam formulae, quae problema perturbatum concernunt, formam simplicissimam induant.

Consideremus enim in integrabilibus inventis quantitates $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, $b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ ut functiones ipsius t tales, ut integralia iam satisfaciant aequationibus differentialibus:

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_m}, \end{cases}$$

designante Ω functionem ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ quamcunque. Quae est extensio formularum vulgarium perturbationum, primum ab ill. *Hamilton* in medium prolata, dum vulgo functionem perturbatricem Ω quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ non implicare supponitur. Quoties enim functio Ω ipsas p_i non continet, fit e (5.), sicuti in (1.):

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

sive *differentialia* prima $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$ eodem modo in problemate perturbato atque non perturbato per $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ exprimuntur. Unde, quum in utroque problemate ipsae $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ eodem modo a t atque elementis $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ pendeant, quae tantum in posteriore problemate ut variabiles spectantur, etiam differentialia prima $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$ in perturbato atque non perturbato problemate per tempus et elementa iisdem formulis exhibentur. Quae est suppositio vulgaris. Sed in ea, quam secundum ill. *Hamilton* proposui, extensione variabiles quidem

q_i, p_i omnes eodem modo per tempus et elementa in utroque problemate exhibentur, sed differentialia prima diversa ratione per q_i et p_i exprimuntur ideoque etiam diversa ratione per tempus et elementa.

Differentiando (2.) et substituendo (5.) obtinetur:

$$\frac{da_i}{dt} = [H_i, f] + [H_i, \Omega],$$

$$\frac{db_i}{dt} = [H_i', f] + [H_i', \Omega],$$

excepta tantum formula, quae pro elemento b invenitur:

$$\frac{db}{dt} + 1 = [H', f] + [H', \Omega].$$

Sed habemus e (3.), (4.):

$$[H_i, f] = [H_i, H] = 0, \qquad [H_i', f] = [H_i', H] = 0,$$

praeter

$$[H', f] = [H', H] = +1;$$

unde pro *quolibet* ipsius i valore fit:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \frac{da_i}{dt} = [H_i, \Omega], \\ \frac{db_i}{dt} = [H_i', \Omega]. \end{cases}$$

Si in his formulis post expressiones ad dextram ope aequationum (2.) formatas loco variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ introducuntur ut variabiles ipsae $a, a_1, \ldots a_{m-1}, b, b_1, \ldots b_{m-1}$, evadunt illae formulae (6.) inter has et ipsum t aequationes $2m$ differentiales vulgares, quibus elementa a_i, b_i ut functiones ipsius t determinanda sunt. Habetur autem, si functionem Ω in expressionibus ad dextram, per elementa a_i, b_i atque t expressam supponimus, quum sit $a_i = H_i$, $b_i = H_i'$:

$$[H_i, \Omega] = \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k} [H_i, H_k] + \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k} [H_i, H_k'],$$

$$[H_i', \Omega] = \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k} [H_i', H_k] + \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k} [H_i', H_k'].$$

Evanescunt autem e (3.) termini in differentialia partialia $\frac{\partial \Omega}{\partial a_k}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial b_k}$ ducti omnes, praeter

$$[H_i, H_i'] = -1,$$

unde fit,

$$[H_i, \Omega] = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

$$[H_i', \Omega] = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}.$$

Hinc abeunt formulae (6.) in sequentes:

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \\ \frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}, \end{cases}$$

sive

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a},$$
$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1},$$
$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{da_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{m-1}}, \quad \frac{db_{m-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}}.$$

Quae formulae pro differentialibus elementorum perturbatorum inventae, egregiae simplicitatis.

E quibus patet insequens theorema:

*) Problema quoddam approximatum huiuscemodi aequationibus contine

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \cdots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \cdots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

designante f quamlibet ipsarum p_i, q_i functionem. Cuius systematis secundum m dum supra propositam inventa sint integralia:

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \cdots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

ubi a, a_1, $\ldots$ a_{m-1} constantes arbitrarias denotent, quae in functionibus H, H_1, $\ldots$ non occurrant, et ubi functiones H, H_1, $\ldots$ H_{m-1} aequationibus

$$0 = [H_i, H_k] = \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} + \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial q_1} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}$$

*) Abhinc usque ad initium §. 58 lacuna in manuscripto invenitur, quam illo argumento sine dubio *Jacobi* eo loco tractandum sibi proposuerat explere conatus sum. C.

identice satisfaciant. Deinde si ope aequationum

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

ipsarum p_i valores per q_1, q_2, $\ldots$ q_m et per constantes arbitrarias a, a_1, $\ldots$ a_{m-1} exhibentur, erit

$$V = \int (p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_m\, dq_m)$$

expressio integrabilis, atque erunt

$$\frac{\partial V}{\partial a} = b + t, \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}$$

aequationes finitae problematis approximati, designantibus b, b_1, b_2, $\ldots$ b_{m-1} constantes novas arbitrarias. Jam si problema perturbatum contineatur aequationibus his:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m},$$

in quibus functio perturbatrix Ω functionem quamlibet ipsarum t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m denotet, exprimantur ex aequationibus integralibus problematis approximati ipsae q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m, nec non functio Ω, per a, a_1, $\ldots$ a_{m-1}, b, b_1, $\ldots$ b_{m-1}, t. Tum introductis quantitatibus a, a_1, $\ldots$ a_{m-1}, b, b_1, $\ldots$ b_{m-1} loco ipsarum q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m tamquam variabilibus, aequationes differentiales problematis perturbati abeunt in has:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \ldots \quad \frac{da_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{m-1}},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \ldots \quad \frac{db_{m-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}},$$

quarum forma aequationibus propositis prorsus est similis.

Formulae perturbationum et theorema de tertio integrali e binis inveniendo extenduntur ad casum, quo functio f ipsam t explicite continet.

53.

Formulae perturbatoriae §. antec. traditae nullo modo mutantur, si functio f ipsam t etiam explicite involvit. Factis enim in §. antec. mutationibus indicatis, invenimus, datis aequationibus differentialibus perturbatis:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m},$$

fieri formulas differentiales elementorum perturbatorum:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_m},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_m}.$$

Addam, etiam theorema VI. §. 27 valere, si functio f ipsam t involvat, **sive,** *designantibus*

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

bina integralia quaecunque aequationum

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

fieri tertium integrale

$$[\varphi, \psi] = \text{Const.}$$

Ut enim $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ integralia sint aequationum differentialium propositarum, earum ope identice fieri debet $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = 0$, sive

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + [\varphi, f] = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} + [\psi, f] = 0.$$

Unde aequatio identica, quae e theoremate V. §. 26 habetur,

$$[[\varphi, \psi], f] + [[\psi, f], \varphi] + [[f, \varphi], \psi] = 0,$$

substitutis aequationibus *identicis:*

$$[\psi, f] = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad [f, \varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

in hanc abit:

$$[[\varphi, \psi], f] + \left[\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right] =$$

$$[[\varphi, \psi], f] + \frac{\partial[\varphi, \psi]}{\partial t} = 0.$$

Quae ope aequationum differentialium propositarum convenit cum aequatione

$$\frac{d[\varphi, \psi]}{dt} = 0,$$

quae demonstranda erat. Propositionem praecedentem ea, qua eam exhibuimus extensione, iam ill. *Poisson* olim tradidit.

De integrali cuius variatione aequationes dynamicae derivantur, etiam casu quo functio f vel U ipsam t explicite involvat.

54.

Si in problematis mechanicis functio f adhuc ipsam t *explicite* involvit, quem casum antecedentibus consideravimus, principia generalia de conservatione virium vivarum, arearum, centri gravitatis valere desinunt. Tantum in locum principii minimae actionis aliud proponere licet simile, quod etiam hoc casu valet. Quoties enim ipsa t ut variabilis independens non variatur, sed solae functiones eius $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, atque statuuntur aequationes:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

quibus determinentur $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$: aequationes differentiales reliquas

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

amplectitur una aequatio symbolica:

$$(1.) \quad \begin{cases} \delta\left\{p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right\} = \\ \dfrac{d.\{p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m\}}{dt}. \end{cases}$$

Quod etiam locum habet, si f ipsam t explicite continet, quippe quae invariata manet. Ex integratione aequationis praecedentis prodit, si pro limitibus ipsius t evanescunt variationes omnes δq_i sive quantitates q_i datos valores induere debent:

$$(2.) \quad \delta\int\left\{p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right\}dt = 0.$$

Formula (1.) eadem est atque supra §. 37 exhibita, si tantum H loco f scribitur; illo tamen loco suppositum erat, H sive f ipsam t explicite non continere. Ibidem vidimus in applicationibus mechanicis, expressionem in (2.) sub signo integrali contentam, esse

$$p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f = T + U,$$

semper designante T semissem summae virium vivarum atque U functionem coordinatarum x_i, y_i, z_i, cuius differentialia partialia secundum x_i, y_i, z_i sumta exprimunt vires motrices, quibus massa m_i secundum directiones axium coordinatarum sollicitatur. Quae functio U casu, quem consideramus, ipsam t etiam

explicite involvit. In problematis igitur mechanicis, etiamsi U ipsam t explicite continet, valebit aequatio:

$$(3.) \qquad \delta \int (T+U)\,dt = 0,$$

quae eo casu quodammodo principii minimae actionis locum tenet. Quam aequationem (3.) primum video ab ill. *Hamilton* in Commentationibus iam saepius laudatis adhibitam esse. Quae adeo facilius sese accommodat ad aequationes differentiales dynamicas inde derivandas quam principium illud. Neque hoc est, uti opinabantur Mathematici, sed illa aequatio, quae respondet principio statico *quietis*. Neque vero de integrali $\int (T+U)\,dt$ valet, quod de principio minimae actionis probari potest, integrale cuius evanescit variatio, *semper* fieri *minimum*, dummodo ne per nimium intervallum extendatur. Nam illud integrale etiam pro angustissimis intervallis, aliis casibus minimum, aliis maximum, aliis neutrum fit.

De combinatione quadam principii conservationis virium vivarum cum principio conservationis arearum, quae certis casibus etiam valet, si functio U ipsam t explicite continet.

55.

Quoties U ipsam t involvit, quum neque principium conservationis virium vivarum neque conservationis arearum valeat, videamus, an non casibus quibusdam earum combinatio locum habere possit. Sint aequationes propositae:

$$(1.) \quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \cdots, \end{cases}$$

designantibus $F=0$, $\Phi=0$, ... aequationes conditionales atque ipsi i tributis valoribus 1, 2, ... n, siquidem n est numerus punctorum materialium systematis. Quae sunt notae formulae dynamicae, in quibus iam suppono, functionem U etiam ipsam t continere. Multiplicatis (1.) per $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ et summatione facta, prodit:

$$(2.) \qquad \frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

terminis in λ_1, λ_2, ... ductis per aequationes conditionales evanescentibus.

Ut respectu plani coordinatarum x, y principium conservationis arearum locum habeat, primum aequationes conditionales ita comparatae esse debent, ut sit identice:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \left\{ y_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial F}{\partial y_i} \right\} = 0, \\ \Sigma_i \left\{ y_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right\} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Deinde etiam functio U, a qua vires sollicitantes pendent, ita comparata esse debet, ut identice sit:

$$\Sigma_i \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} = 0.$$

Sed ut obtineatur integrale aliquod casu quem consideramus, non opus est ut expressio ad laevam aequationis praecedentis evanescat. Nam quum e (1.) sequatur:

$$(4.)\quad \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \int \Sigma \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} dt$$

atque e (2.) expressionis $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ integrale obtineatur, tantum necesse est, ut identice habeatur:

$$(5.)\quad \Sigma \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} = \alpha \frac{\partial U}{\partial t},$$

designante α constantem. Quippe quo casu e (2.) et (3.) eruetur integrale aequationum differentialium propositarum:

$$(6.)\quad \alpha(T-U) + \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \text{Const.},$$

sive *certa combinatio principiorum conservationis virium vivarum et arearum locum habebit.*

Restat, ut functio U ita determinetur, ut aequationi (4). identice satisfaciat, et indagetur, quaenam sint problemata mechanica, quae functioni U ita determinatae respondeant.

Docent praecepta nota integrationis aequationum differentialium partialium linearium, U designare posse quamcunque functionem integralium systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$dt : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dy_1 : dy_2 : \ldots : dy_n =$$
$$\alpha : -y_1 : -y_2 : \ldots : -y_n : x_1 : x_2 : \ldots : x_n,$$

hoc est functionum, quae in integratione harum aequationum constantibus arbitrariis aequales existunt. Aequationibus differentialibus

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dy_1 : dy_2 : \ldots : dy_n =$$
$$-y_1 : -y_2 : \ldots : -y_n : x_1 : x_2 : \ldots : x_n$$

satisfit aequationibus:

$$x_i = \alpha_i \cos(\varphi + \beta_i), \qquad y_i = \alpha_i \sin(\varphi + \beta_i),$$

in quibus α_i, β_i sunt constantes arbitrariae atque φ designare potest functionem quamcunque ipsius t. Quae functio φ determinatur per proportionem

$$dt : \alpha = dx_1 : -y_1 = d\varphi : 1,$$

unde

$$\alpha\varphi = t.$$

Si loco coordinatarum orthogonalium x_i, y_i polares introducuntur, ponendo

$$x_i = r_i \cos v_i, \qquad y_i = r_i \sin v_i,$$

atque loco constantis $\frac{1}{\alpha}$ ponitur γ, fit:

$$\alpha_i = r_i, \qquad \beta_i = v_i - \gamma t.$$

Unde iam est forma maxime generalis functionis U, quae aequationi (5.) identice satisfacit, functio arbitraria ipsarum r_i atque $v_i - \gamma t = v_i - \frac{t}{\alpha}$, hoc est distantiarum punctorum materialium ab initio coordinatarum proiectarum in ipsarum x, y planum, et angulorum, quos distantiae proiectae faciunt cum recta, *quae in plano illo uniformiter circa initium coordinatarum rotatur.* Insuper functio U etiam quantitates z_i quocunque modo continere potest.

Aequationibus (3.) satisfieri constat, si F et Φ sunt functiones ipsarum r_i atque differentiarum ipsarum v_i. Unde habemus propositionem:

„*Statuamus in aequationibus differentialibus dynamicis* (1.), *posito* $x_i = r_i \cos v_i$, $y_i = r_i \sin v_i$, *functiones* F, Φ, ... *praeter quantitates* z_i, r_i *tantum differentias ipsarum* v_i *continere, porro ipsam* U *esse functionem quamlibet quantitatum* z_i, r_i *atque* $v_i - \gamma t$, *designante* γ *constantem, eri aequationum* (1.) *integrale*:

$$T - U + \gamma \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \text{Const.}.“$$

Integrale inventum etiam sic repraesentare licet:

$$(7.) \qquad T - U - \gamma \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt} = \text{Const.},$$

sive etiam:

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2+r_i^2\left(\frac{dv_i}{dt}-\gamma\right)^2\right\} = \tfrac{1}{2}\gamma^2\Sigma m_i r_i^2+U+\text{Const.}.$$

Pars laeva aequationis praecedentis (8.) est semissis summae virium vivarum systematis, siquidem refertur systema ad axes mobiles coordinatarum x et y, in ipsarum plano circa initium coordinatarum uniformiter rotantes.

Aequationes differentiales (1.) notum est sic etiam repraesentari posse:

$$(9.)\qquad \begin{cases} m_i\left(\frac{d^2r_i}{dt^2}-r_i\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2\right) = \frac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots, \\ m_i\frac{d.r_i^2\frac{dv_i}{dt}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial v_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial v_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}+\cdots, \\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{cases}$$

Si statuitur

$$w_i = v_i-\gamma t,$$

erit U functio ipsarum r_i, w_i, z_i, quae praeter has quantitates ipsam t non continet; porro aequationes (9.) evadunt:

$$(10.)\qquad \begin{cases} m_i\left(\frac{d^2r_i}{dt^2}-r_i\left(\frac{dw_i}{dt}\right)^2\right) = \gamma m_i r_i\left\{2\frac{dw_i}{dt}+\gamma\right\}+\frac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots, \\ m_i\frac{d.r_i^2\frac{dw_i}{dt}}{dt} = -\gamma m_i\frac{d.r_i^2}{dt}+\frac{\partial U}{\partial w_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial v_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}+\cdots, \\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{cases}$$

Si tres aequationes praecedentes per dr_i, dw_i, dz_i multiplicantur atque in productis ipsi i valores 1, 2, ... n tribuuntur, omnium summa facile suppeditat integrale inventum (8.). Termini enim bini in r_i, $\frac{dr_i}{dt}$, $\frac{dw_i}{dt}$ ducti se mutuo destruunt, eritque

$$\Sigma_i\frac{\partial F}{\partial w_i}dw_i = \Sigma_i\frac{\partial F}{\partial v_i}dv_i, \qquad \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial w_i}dw_i = \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}dv_i,$$

quum e suppositione supra circa functiones F, Φ, ... facta identice sit

$$\Sigma_i\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \qquad \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0, \qquad \ldots.$$

Aequationes differentiales ipsis (10.) similes ill. *Laplace* in Opere de *Machina Coelesti* tradidit, quaerens motum planetae verum circa *ipsius* medium, dum formulae praecedentes accommodatae sunt quaesitioni, qua duorum planetarum alterius motus verus circa *alterius* medium consideratur.

Functio U forma antecedentibus praescripta gaudet, *quoties puncta* m_i *quum a se invicem tum a centris quotcunque trahuntur, quae circa axem coordinatarum* z *uniformiter rotantur, communi rotationis velocitate, et in qua neque ipsa neque puncta* m_i *reagunt.* Pro quibus centris etiam substitui possunt corpora solida cuiuslibet formae exterioris ac constitutionis interioris, quae circa axem coordinatarum z eadem ac constanti velocitate rotantur atque insuper neque a se invicem neque a punctis m_i sollicitantur. His omnibus casibus integrale unum propositum locum habebit. Qui obveniunt casus in problemate trium corporum, siquidem statuatur, quod proxime licet, corpus principale et corpus perturbans in plano fixo uniformiter rotari circa commune eorum gravitatis centrum. Unde integrale propositum iustum erit in problemate trium corporum respectu omnium potestatum excentricitatis et inclinationis corporis perturbati atque massae corporis perturbati, reiectis terminis ab excentricitate et inclinatione corporis perturbantis atque massa ipsius corporis perturbati pendentibus.

Ostenditur, quomodo et aequatione conservationis virium vivarum et aequatione una conservationem arearum concernente ordo integrationum binis unitatibus minuatur. Quod haudquaquam pro quolibet aequationum dynamicarum integrali contigit.

56.

Quoties functio U ipsam t non explicite involvit ideoque principium conservationis virium vivarum locum habet, integrale *unum*, quo principium illud continetur, ordinem differentiationum minuit *duabus* unitatibus. Sint enim rursus aequationes differentiales numero $2m$ sequentes:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

si U ideoque etiam $H = T - U$ ipsam t non continet, aequationes illae sic exhiberi possunt:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

quae sunt aequationes differentiales $2m-1$ primi ordinis, ideoque unius aequa-

tionis differentialis $(2m-1)^{ti}$ ordinis locum tenent, quae per integrale a principio conservationis virium vivarum suppeditatum ad ordinem $(2m-2)^{tum}$ reducitur. Contra si U ideoque etiam H ipsam t continet, aequationes differentiales propositae unius aequationis ordinis $2m^{ti}$ locum tenent.

Si insuper principium conservationis arearum respectu plani cuiusdam dati locum habet, ordo differentiationum rursus duabus unitatibus minuitur, siquidem semper statuitur ordo differentiationum systematis aequationum differentialium vulgarium idem atque unius aequationis inter duas variabiles, ad quam per regulas notas eliminationis systema aequationum differentialium revocari potest, sive etiam idem atque numerus constantium arbitrariarum, quas poscit integratio completa. Sumatur enim planum datum ut planum coordinatarum x et y, ac statuatur rursus

$$x_i = r_i \cos v_i, \qquad y_i = r_i \sin v_i;$$

casu quem consideramus continebunt aequationes propositae differentialia quidem prima et secunda singulorum angulorum v_i, sed ipsorum v_i tantum differentias. Iam per integrale, quod casu proposito principium arearum concernit, fit, designante α constantem arbitrariam,

$$\alpha = \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt},$$

unde posito

$$u_i = v_i - v_n, \qquad R = \Sigma m_i r_i^2, \qquad N = \Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt},$$

fit

$$(1.) \qquad \alpha = R\frac{dv_n}{dt} + \Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} = R\frac{dv_n}{dt} + N.$$

Si in aequatione, qua principium conservationis virium vivarum continetur,

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 \right\} = U + h,$$

in qua h est constans arbitraria, substituimus valores $v_i = u_i + v_n$, fit illa:

$$\Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \right\} + 2\frac{dv_n}{dt}\Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} + R\left(\frac{dv_n}{dt}\right)^2 = U + h,$$

sive e (1.)

$$(2.) \qquad \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \right\} + \frac{\alpha^2 - N^2}{R} = U + h.$$

Si in aequationibus differentialibus substituuntur valores

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{\alpha - N}{R},$$

exulavit quantitas v_n simul cum eius differentialibus, quum aequationes conditionales atque functio U tantum quantitates z_i, r_i, u_i contineant, unde numerus variabilium unitate, ideoque ordo differentiationum duabus unitatibus minuitur. Generaliter, quoties in aequationibus differentialibus propositis variabiles ita eligere licet, ut in iis una ex earum numero non ipsa sed tantum eius bina differentialia prima obveniant, quum novum integrale generaliter invenire liceat, tum uno integrali novo invento ordo differentiationum *duabus unitatibus* diminuitur. Sit enim in aequationibus differentialibus supra propositis q_i variabilis, quae in ipsa H non invenitur, habetur

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

ideoque novum integrale

$$p_i = \text{Const.}.$$

Reiecta deinde aequatione

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

atque considerata p_i in reliquis aequationibus differentialibus ut constante, sicuti inventum est, numerus variabilium q et p ideoque *ordo* differentiationum duabus unitatibus diminutus est.

Etiam in casu, quem §. antec. tractavi, si integrale (8.) §. 55 locum habet, ordo differentiationum duabus unitatibus diminuitur. Nam si statuuntur ut variabiles r_i, w_i, z_i, $r_i' = \frac{dr_i}{dt}$, $w_i' = \frac{dw_i}{dt}$, $z_i' = \frac{dz_i}{dt}$, atque aequationes (10.) §. 55 omnes per unam ex earum numero dividuntur, ipsa t atque elementum dt in aequationibus differentialibus non inveniuntur, ordoque differentiationum unitate diminuitur, qui deinde per integrale (8.) §. 55 altera adhuc unitate diminuitur, prorsus simili ratione atque vidimus, quoties principium conservationis virium vivarum locum habeat, ordinem differentiationum per principium illud atque eliminationem elementi temporis duabus unitatibus diminui.

At non omnibus casibus, quoties habetur integrale novum, simili ratione atque in praecedentibus exemplis ordinem differentiationum scita variabilium electione duabus unitatibus deprimere licet. Ita non fit, ut altero et tertio integrali, quod principium arearum concernit, duas variabiles cum earum differentialibus eliminare liceat ideoque *quatuor* unitatibus iste ordo deprimatur. Sunt tantum praecedentia exempla simplicissima, in quibus iam absque theoria supra condita illa depressio ordinis differentiationum sponte se offert. Theoria

autem supra condita docet, semper variabilium systema investigari posse, pro quibus ordo differentiationum duabus unitatibus inferior evadat; sed generaliter illa investigatio secundum praecepta tradita postulat, ut alia condantur systemata aequationum differentialium, quae inferiorum ordinum sunt, atque singulorum istorum systematum auxiliarium integrale unum quodcunque indagetur.

Systema propositum aequationum differentialium vulgarium vocatur canonicum. Cuiusmodi systema in aliud canonicum transformatur. Quod una cum transformatione aequationis differentialis partialis valde generali peragitur. Canonicum elementorum systema.

57.

Revertor ad formulas perturbationum §. 52 traditas. Videmus, aequationes §. 52 (7.), in quibus elementa perturbata ut variabiles introducta sunt, prorsus eadem forma gaudere atque ipsas aequationes differentiales §. 52 (5.). Formam autem illam memorabilem, qua utrumque systema aequationum differentialium gaudet, quia frequenter in his aequationibus obvenit, dicam aequationum differentialium formam *canonicam*. Sunt in eiusmodi systemate canonico aequationum differentialium vulgarium variabiles numero pari, atque altera pars semissis variabilium alteri semissi singulae singulis ita respondent, ut differentialia illarum variabilium aequalia sint differentialibus partialibus certae cuiusdam functionis secundum has variabiles sumtis, et harum variabilium differentialia aequalia sint eiusdem functionis differentialibus partialibus secundum illas variabiles sumtis atque insuper signo negativo affectis.

His positis transformatio illa, qua vidimus §§. 52, 53 aequationes

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{dq_i}$$

mutari in has:

$$\frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}, \qquad \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

continetur sub problemate generali, *quodcunque systema aequationum differentialium, quod canonica forma gaudeat, in aliud eiusdem formae per introductionem novarum variabilium transformare*. Quod problema etiam ratione prorsus diversa proponere licet.

Comprobavi enim antecedentibus integrationem systematis aequationum differentialium:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

in qua maioris generalitatis gratia supponam, praeter quantitates q_i, p_i etiam ipsam t functionem f explicite ingredi, pendere ab integratione aequationis

differentialis partialis, quae provenit ex aequatione

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + f^{*}),$$

substituendo in functione f in locum quantitatum p_i differentialia functionis V partialia respectu quantitatum q_i sumta, sive statuendo

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Inventa enim functione V, aequationi illi differentiali partiali satisfaciente atque involvente m constantes arbitrarias a_i, praeter unam ipsi V mera additione adiungendam, erant integralia completa aequationum:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

sequentia:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

designantibus b_i novas constantes m arbitrarias. Videmus igitur, inter systematis canonici aequationum differentialium vulgarium et aequationis differentialis partialis integrationem arctissimum nexum intercedere. *Unde alterius transformatio statim etiam alterius transformationem suppeditabit.*

In promptu est aequationis differentialis partialis transformatio, si tantum in locum variabilium *independentium* aliae variabiles independentes introducuntur. *Neque alias transformationes hactenus considerasse videntur Analystae* **). Sed dantur etiam transformationes aequationis differentialis partialis primi ordinis alius in aliam primi ordinis per substitutiones, in quibus expressiones variabilium independentium alterius aequationis continent quum variabiles independentes alterius tum differentialia secundum eas sumta partialia. Methodus generalis eiusmodi efficiendi transformationem haec est:

Proposita sit aequatio:

$$(1.) \qquad dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

in qua

$$(2.) \qquad f_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial t}$$

sit data functio ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ atque ipsarum

$$p_1 = \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}.$$

---

*) Constantem a §. 35 (3.) additam hic quod licet $= 0$ posui.

**) quarum tamen specimen quoddam offert *Euleriana* illa methodus qua variabiles independentes cum differentialibus secundum illas sumtis commutantur. C.

Aequatio (1.) locum tenet aequationis differentialis partialis (2.), atque in locum aequationis (2.) licet aequationem (1.) transformare. Ad quam efficiendam transformationem assumo functionem *prorsus arbitrariam* V ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque novarum variabilium $a_1, a_2, \ldots a_m$. Quae determinentur novae variabiles per ipsas $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum:

$$(3.) \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

ac praeterea statuatur

$$(4.) \quad -\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad -\frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m.$$

His positis fit:

$$(5.) \quad \begin{cases} dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m \\ \qquad\qquad - b_1 da_1 - b_2 da_2 - \cdots - b_m da_m. \end{cases}$$

Qua aequatione subducta de (1.) positoque

$$(6.) \quad V_1 - V = W,$$

nanciscimur:

$$(7.) \quad dW = -\left\{ f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m.$$

Transformationem generalem aequationis differentialis partialis primi ordinis, quae antecedentibus continetur, theoremate particulari proponere convenit.

Theorema VIII.

Sint $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ variabiles independentes, inter quas et functionem earum V_1 proposita sit aequatio differentialis partialis:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V_1}{\partial q_m}\right) = 0:$$

assumatur functio prorsus arbitraria V ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ et novarum variabilium $a_1, a_2, \ldots a_m$; atque in locum quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_m$, introducendo quantitates

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m};$$

exprimamus quantitates sequentes:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m},$$

atque si in f_1 *loco* $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$ *scribimus* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, functionem

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$$

per quantitates

$$t, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_m, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_1}, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \quad \dots \quad -\frac{\partial V}{\partial a_m};$$

quo facto fiat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$$
$$= \varphi\left(t, a_1, a_2, \dots a_m, -\frac{\partial V}{\partial a_1}, -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \dots -\frac{\partial V}{\partial a_m}\right);$$

his omnibus transactis, si in functione φ *loco* $-\frac{\partial V}{\partial a_i}$ *scribitur* $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, *erit aequatio differentialis partialis proposita transformata in sequentem:*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\left(t, a_1, a_2, \dots a_m, \frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial a_m}\right) = 0,$$

atque alterius solutio ex alterius invenitur solutione ope aequationis:

$$V_1 = V + W,$$

siquidem aut cognita solutione V_1 *variabiles* $q_1, q_2, \dots q_m$ *exprimuntur per* $a_1, a_2, \dots a_m, t$ *ope aequationum*

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m},$$

aut cognita solutione W *variabiles* $a_1, a_2, \dots a_m$ *exprimuntur per* $q_1, q_2, \dots q_m, t$ *ope aequationum:*

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = -\frac{\partial V}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = -\frac{\partial V}{\partial a_m}.$$

Demonstratio theorematis antecedentibus tradita eo nititur, quod positis aequationibus

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m}$$

inde sponte sequuntur hae aequationes:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -\frac{\partial W}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -\frac{\partial W}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -\frac{\partial W}{\partial a_m},$$

quod etiam inverti potest.

Transformatio generalis systematis canonici aequationum differentialium vulgarium theoremati praecedenti respondens hoc theoremate continetur:

Theorema IX.

Proposito systemate aequationum differentialium vulgarium canonico:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_m}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial p_m}{\partial t} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_m},$$

in qua f_1 est functio ipsarum t, $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ quaecunque, assumatur functio arbitraria V quantitatum $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ atque novarum variabilium $a_1, a_2, \ldots a_m$; quo facto condantur aequationes:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m,$$

quarum ope exprimantur et variabiles $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ et functio

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

per t et novas variabiles $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$; inventa expressione

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

systema aequationum differentialium vulgarium canonicum in aliud canonicum hoc per substitutiones propositas transformatur:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_m},$$

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Theorematis praecedentis gravissimi demonstratio, quamquam iam in quaestionibus supra traditis continetur, si breviter denuo adstruere placet, haec habetur.

E systemate canonico proposito fluunt aequationes symbolicae sequentes, siquidem formularum notarum

$$\delta \cdot \frac{dq_i}{dt} = \frac{d.\delta q_i}{dt}, \quad \delta \cdot \frac{dp_i}{dt} = \frac{d.\delta p_i}{dt}, \quad \delta \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d.\delta V}{dt}$$

recorderis:

$$\begin{aligned}
\delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{dq_i}{dt}\delta p_i - \frac{dp_i}{dt}\delta q_i\right)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{dq_i}{dt}\,\delta\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d\frac{\partial V}{\partial q_i}}{dt}\delta q_i\right)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt}\right) - \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i}{dt}\right)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \delta\cdot\frac{dV}{dt} - \frac{d.\delta V}{dt} - \delta\cdot\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt}\\
&\qquad - \Sigma_i\left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\,\frac{da_i}{dt}\right) - \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i}\delta a_i}{dt}\right)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t - \delta\cdot\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt}\\
&\qquad - \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\,\delta\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i} - \delta a_i\frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}\right)\\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{d.(\varphi - f_1)}{dt}\right)\delta t - \delta(\varphi - f_1)\\
&\qquad + \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\,\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\delta a_i\right).
\end{aligned}$$

Unde quum e systemate canonico proposito sequatur:

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t},$$

invenimus:

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\,\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\,\delta a_i\right).$$

Quae aequatio symbolica systema canonicum transformatum suppeditat, atque insuper aequationem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

quae ex illo sequitur.

Unde functione W per ipsas t, a_1, a_2, ... a_m expressa, fit:

$$(8.)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\left\{f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}\right\},\quad \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1,\quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Eliminatis quantitatibus q_i, p_i ex expressione $f_1+\frac{\partial V}{\partial t}$ ope aequationum (3.) et (4.), evadit illa functio ipsarum $t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$, quam statuamus:

$$f_1+\frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

eritque substitutis ipsarum b_i expressionibus $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, e (8.):

$$(9.) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\varphi\left(t, a_1, a_2, \ldots a_m, \frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial a_m}\right).$$

Quae est aequatio differentialis partialis transformata, quae locum tenet aequationis differentialis partialis propositae (2.). Eritque prorsus eadem substitutione (3.) et (4.) systema canonicum aequationum differentialium vulgarium propositum in aliud canonicum transformatum.

Transformatione generali theoremate antecedente proposita, continetur illa in qua ut variabiles novae statuuntur elementa problematis approximati. Sit enim in theoremate illa

$$(10.) \quad f_1 = f+\Omega,$$

sintque functiones f et V ita comparatae, ut substitutis in f loco ipsarum p_i expressionibus $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, prodeat

$$(11.) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -f;$$

considerari possunt quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m$ tamquam *constantes arbitrariae*, quae afficiunt solutionem V aequationis differentialis partialis

$$\frac{\partial V}{\partial t}+f = 0,$$

ideoque ex iis, quae supra probata sunt, considerari possunt $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_m$ ut *elementa constantia*, quae afficiunt integralia completa

$$(12.) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, & \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m \end{cases}$$

aequationum differentialium

Quoties igitur vice versa in aequationibus (12.) ipsae a_i, b_i ut constantes considerantur, sunt aequationes illae (12.) integralia completa aequationum (13.). Quoties vero in aequationibus (12.) ipsae a_i, b_i ut variabiles considerantur, quae in locum ipsarum q_i, p_i ope aequationum illarum substituendae sunt, docet theorema propositum, transformari ea substitutione aequationes

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_i}$$

in aequationes sequentes:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}.$$

Habemus enim casu proposito:

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = f_1 - f = \Omega.$$

Quae sunt formulae differentiales elementorum perturbatorum, quae a supra propositis tantum eo discrepant, quod in iis $-b_i$ loco b_i scriptum sit. ***Systema elementorum, quae in modum praecedentium per aequationes differentiales canonicas determinantur, et ipsum dicere convenit canonicum elementorum systema.***

De transformatione systematis elementorum canonici in aliud canonicum.

58.

In antecedentibus duae functiones, quarum differentialia partialia sumenda sunt in formandis systematibus canonicis proposito et transformato, inter se differunt. Quoties vero functio V, quae in praecedentibus ex arbitrio assumi poterat ipsam t non continet, erit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

ideoque $f_1 = \varphi$, sive in utroque systemate canonico functio illa eadem erit. Eo casu etiam relationes, quibus novae variabiles e variabilibus primordialibus determinantur, ipsam t non involvunt. Unde si variabiles sunt elementa problematis approximati, etiam novae variabiles non nisi aliud systema elementorum eiusdem problematis approximati erunt. Quodsi igitur formulas differentiales elementorum perturbatorum hac ratione iterum transformamus, ***nanciscimur modum maxime generalem, quo systema elementorum canonicum in alterum systema elementorum canonicum transformetur.*** Habemus enim e theoremate permutando ipsas q_i, p_i, a_i, b_i, resp. cum a_i, b_i, α_i, β_i propositionem sequentem:

Theorema IX^{a}.

Sint formulae differentiales elementorum perturbatorum, designante Ω functionem perturbatricem:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_m},$$
$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_m};$$

sint $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ functiones elementorum praecedentium $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$, quae, designante φ functionem quamlibet ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ab illis pendeant per aequationes:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m,$$

determinantur elementa nova per systema aequationum differentialium prorsus simile:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_m},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_m}.$$

Transformatio generalis elementorum canonicorum, quae ope functionis arbitrariae theoremate praecedenti efficitur, redit in methodam notam, qua e solutione *completa* aequationis differentialis partialis primi ordinis deducitur solutio functionem arbitrariam involvens, quae dicitur *generalis*. Sit enim V solutio aequationis differentialis partialis, ad cuius integrationem e theoria hic exposita reducatur problema approximatum, atque involvat V constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_m$, ita ut sint

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m$$

aequationes finitae problematis approximati et quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ eius elementa canonica. In locum solutionis V etiam scribere licet $V+\varphi$, designante φ constantem; de qua solutione completa deducitur generalis, si constans φ statuitur functio arbitraria constantium $a_1, a_2, \ldots a_m$, atque differentialia partialia expressionis $V+\varphi$ respectu ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m$ sumta nihilo aequiparantur. Statuamus functionem ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m$ arbitrariam involvere praeter has quantitates alias constantes arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$;

eliminatis e $V+\varphi$ ope aequationum

$$-\frac{\partial V}{\partial a_1}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad -\frac{\partial V}{\partial a_m}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

quantitatibus $a_1, a_2, \ldots a_m$, habebitur nova solutio $V+\varphi$, alias m constantes arbitrarias involvens. Etiam de hac deduci possunt aequationes finitae problematis approximati, quippe quae erunt:

$$-\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial a_1}=\beta_1, \quad -\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial a_2}=\beta_2, \quad \ldots \quad -\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial a_m}=\beta_m.$$

Sed quantitates α_i functionem $V+\varphi$ tantum afficiunt, quatenus in ipsis a_i continentur ac praeter has explicite in functione φ; differentialia autem functionis $V+\varphi$ respectu ipsarum a_i sumta supposuimus evanescere; unde erit

$$\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i},$$

sive aequationes novae finitae problematis habentur:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}=-\beta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}=-\beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}=-\beta_m;$$

eruntque $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ nova elementa canonica determinata e primordialibus per has aequationes et illas supra assumtas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}=-\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i.$$

Elementa autem nova canonica inventa si in problemate perturbato tamquam variabiles spectantur, eorum differentialia expressionibus similibus aequalia evadere debent atque elementorum primordialium. Q. D. E.

Transformatio ea, quae in §§. antecedentibus tradita est, etiam generalior proponitur.

59.

Sed quanta generalitate gaudeat transformatio aequationis differentialis partialis primi ordinis et quae inde pendeat systematis canonici aequationum differentialium vulgarium supra §. 57 proposita, sunt tamen aliae, quas illa transformatio non amplectatur. Scilicet adhuc sequentes addendae sunt.

Sit rursus aequatio transformanda:

$$dV_1 = -f_1 dt+p_1 dq_1+p_2 dq_2+\cdots+p_m dq_m,$$

in qua f_1 est data functio ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; sit etiam V rursus functio ex arbitrio assumta ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m$ inter quas vero quantitates iam statuamus insuper locum habere aequationes:

$$F=0, \quad \Phi=0, \quad \ldots .$$

Tum, posito rursus $V_1 - V = W$, erit aequatio transformata:

$$dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

iidem ponitur:

$$\begin{aligned}
\varphi &= f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \cdots \\
0 &= p_1 - \frac{\partial V}{\partial q_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \cdots \\
0 &= p_2 - \frac{\partial V}{\partial q_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= p_m - \frac{\partial V}{\partial q_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_m} + \cdots \\
b_1 &= -\frac{\partial V}{\partial a_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \cdots \\
b_2 &= -\frac{\partial V}{\partial a_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_m &= -\frac{\partial V}{\partial a_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} + \cdots
\end{aligned}$$

his aequationibus, quibus ipsae addantur $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., eliminatis λ_2, ... determinandae sunt $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_2, \ldots b_m$, earumque valores in expressione ipsius φ substituendae.

Si multiplicatores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ evitare placet neque tamen symmetriae mularum derogare, transformationem etiam sic proponere licet. Aequaiibus enim $F = 0$, $\Phi = 0$, ... inter quantitates q_i, a_i, t assumtis, quarum nerus sit $m-k$, sint $r_1, r_2, \ldots r_k$ functiones quaelibet ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m$, $a_2, \ldots a_m$; licet omnes $q_1, q_2, \ldots q_m$ per ipsas $t, a_1, a_2, \ldots a_m$ atque vas quantitates $r_1, r_2, \ldots r_k$ exprimere, quae expressiones eliminatis r_1, $\ldots r_k$ suppeditabunt $m-k$ aequationes inter ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m, a_1$, $\ldots a_m, t$.

Aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., quum ex arbitrio assumi possint, iam um in locum statuere licet, ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m$ esse functiones arbitrarias ntitatum $t, a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k$. Quibus electis, sit

$$\begin{aligned}
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i} &= R_i, \\
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i} &= A_i, \\
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial t} &= T.
\end{aligned}$$

Unde erit:

$$\begin{aligned} dV_1 = & \quad -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m \\ = & -(f-T)dt + R_1 dr_1 + R_2 dr_2 + \cdots + R_k dr_k \\ & + A_1 da_1 + A_2 da_2 + \cdots + A_m da_m . \end{aligned}$$

Assumta iam ex arbitrio ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k, t$ functione V, statuatur:

$$f_1 - T + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = R_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial r_2} = R_2, \quad \ldots \qquad \frac{\partial V}{\partial r_k} = R_k$$

$$A_1 - \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad A_2 - \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad A_m - \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m;$$

erit

$$d(V_1 - V) = dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m .$$

Ex aequationibus $m+k$:

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i} = R_i = \frac{\partial V}{\partial r_i}$$

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i} = A_i = \frac{\partial V}{\partial a_i} + b_i$$

et per resolutionem aequationum linearium determinantur $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $r_1, r_2, \ldots r_k, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, et eliminatis $p_1, p_2, \ldots p_m$ habentur k aequationes inter ipsas $r_1, r_2, \ldots r_k, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, quarum ope ipsae $r_1, r_2, \ldots r_k$ ideoque etiam $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ determinari possunt. Qui deinde valores in expressione φ substituendi sunt, ut illa solarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ functio evadat. Transformata autem aequatione

$$dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

in hanc

$$dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m ,$$

in quibus f_1 est ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, atque φ ipsarum $t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ functio, simul aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0$$

altera in alteram transformatae sunt. Substitutis in f_1 loco ipsarum p_i expressionibus $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, in φ loco ipsarum b_i expressionibus $\frac{\partial V}{\partial a_i}$, evadunt aequa-

nes illae aequationes differentiales partiales, quarum igitur iam per methodum ›positam transformationes novas nacti sumus.

Si $k=m$, transformatio eadem obtinetur atque §. 57. Transformationes, as ex antecedentibus pro $k<m$ obtinemus, etiam novas transformationes stematum canonicorum aequationum differentialium vulgarium suppeditant. similiter atque in §. antec. etiam systematum elementorum canonicorum vas inde eruimus transformationes. Quas transformationes, singulas binis ›dis, sequentibus theorematibus proponam.

Theorema X.

Designante i numeros 1, 2, ... *m propositum sit systema aequationum differentialium vulgarium:*

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial f_1}{\partial q_i};$$

assumatur functio arbitraria V ipsarum t, q_1, q_2, ... q_m *novarumque variabilium* a_1, a_2, ... a_m, *inter quas quantitates* $2m+1$ *statuatur locum habere aequationes quascunque*

$$F=0,\quad \Phi=0,\quad \ldots;$$

condantur porro aequationes $2m+1$ *sequentes:*

$$\begin{aligned}\varphi &= f_1+\frac{\partial V}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial t}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\cdots,\\ p_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial q_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}-\cdots,\\ -b_i &= \frac{\partial V}{\partial a_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial a_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}-\cdots,\end{aligned}$$

quarum aequationum ope, advocatis ipsis $F=0$, $\Phi=0$, ..., *et eliminari possunt multiplicatores* λ_1, λ_2, ..., *et determinantur* $2m$ *quantitates* q_i *et* p_i *nec non functio* φ *per ipsam t atque* $2m$ *novas quantitates* a_i, b_i; *qui ipsorum* q_i, p_i *valores si substituuntur in systemate proposito aequationum differentialium vulgarium, transformatur illud in sequens:*

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{\partial \varphi}{\partial b_i},\quad \frac{db_i}{dt}=-\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}.$$

Porro, in locum ipsorum p_i, b_i *scribendo* $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, *ubi conduntur aequationes differentiales partiales*

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+f_1=0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t}+\varphi=0,$$

alterius solutio ex alterius obtinetur solutione per aequationem:

$$V_1 = V+W.$$

Theorema XI.

Designante i numeros 1, 2, ... *m, data sint differentialia elementorum problematis alicuius perturbati per aequationes:*

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial a_i},$$

designante Ω *functionem perturbatricem; assumatur functio arbitraria* V *elementorum* $a_1, a_2, \ldots a_m$ *novarumque quantitatum* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; *condantur porro aequationes* $2m$ *sequentes:*

$$b_i=\frac{\partial V}{\partial a_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial a_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}-\cdots,$$

$$-\beta_i=\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}-\cdots,$$

quarum aequationum ope, advocatis ipsis $F=0$, $\Phi=0$, ..., *et eliminari possunt multiplicatores* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *et determinantur* $2m$ *elementa* a_i, b_i *per novum systema elementorum* α_i, β_i; *quae elementa nova si etiam in functionem perturbatricem* Ω *loco ipsorum* a_i, b_i *introducuntur, inveniuntur differentialia elementorum novi systematis* α_i, β_i *per formulas:*

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}.$$

Obtinetur theorema praecedens e theoremate X. statuendo, functiones V, F, Φ, ... ipsam t non involvere, et permutando p_i, q_i cum b_i, a_i, atque b_i, a_i cum β_i, α_i. Theoremata praecedentia etiam hanc alteram formam induere possunt:

Theorema X^a.

Designante i numeros 1, 2, ... *m, propositum sit systema aequationum differentialium vulgarium:*

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial f_1}{\partial q_i};$$

statuantur quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ *aequales expressionibus quibuscunque ipsius* t *novarumque quantitatum* $a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k$, *designante* k *numerum aut ipsi* m *aequalem aut ipso* m *minorem; assumatur deinde*

functio arbitraria V earundem quantitatum $a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k, t$, atque condantur aequationes $m+k$:

$$\frac{\partial V}{\partial r_i} = p_1\frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial r_i},$$

$$b_i + \frac{\partial V}{\partial a_i} = p_1\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial a_i};$$

per quas determinentur quantitates $r_1, r_2, \ldots r_k, p_1, p_2, \ldots p_m$ per quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, unde etiam quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ per easdem quantitates determinatae erunt; quibus substitutis quantitatum r_i, q_i, p_i expressionibus per easdem quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ etiam exhibeatur functio

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \left\{p_1\frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial t}\right\};$$

quibus factis si expressiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ inventae substituuntur in systemate aequationum differentialium propositarum, obtinebitur hoc similis formae:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial a_i};$$

simul aequationes differentiales partiales

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0,$$

quae obtinentur ponendo in altera $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$ loco p_i, in altera $\frac{\partial W}{\partial a_i}$ loco b_i, per easdem aequationes altera in alteram transformantur, et alterius solutio ex alterius habetur per aequationem

$$V_1 = W + V.$$

Theorema XI^a.

Designante i numeros $1, 2, \ldots m$, data sint differentialia elementorum problematis alicuius perturbati per aequationes

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_i},$$

designante Ω functionem perturbatricem; statuantur elementa $a_1, a_2, \ldots a_m$ aequalia expressionibus quibuscunque novarum quantitatum $m+k$,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_k, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots \quad \varepsilon_k,$$

designante k numerum aut ipsi m aequalem aut ipso m minorem; assumta

deinde functione arbitraria V earundem m+k quantitatum, formentur aequationes m+k

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \varepsilon_i},$$

$$\beta_i + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i};$$

per quas determinentur m+k quantitates $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_l, b_1, b_2, \ldots$ *per quantitates novas* $2m$*:*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m,$$

unde etiam $a_1, a_2, \ldots a_m$ *per easdem quantitates determinatae erunt; quarum expressiones elementorum* $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ *per nova elementa* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ *si substituuntur in functione perturbatrice habentur differentialia novi elementorum systematis per formulas similes*

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

Haec altera theorematum forma commodior est, quoties in priore forma numerus aequationum $F = 0$, $\Phi = 0$, ... valde magnus habetur.

De casu quodam simplicissimo, quo e systemate elementorum canonico aliud ejusmodi systema eruatur.

60.

Paucis agam de transformationibus simplicissimis, quarum tamen frequentissimus usus erit, alius systematis canonici elementorum in aliud canonicum. Sunt elementa canonica, quorum differentialia huiusmodi aequationibus primuntur:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i},$$

quarum aequationum integratio redit in integrationem aequationis differentialis partialis:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega,$$

siquidem in functione perturbatrice Ω loco ipsorum $b_1, b_2, \ldots b_m$ scribantur $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial a_m}$, sive quod idem est, redit integratio aequationum differentialium vulgarium praecedentium in integrationem aequationis:

$$dV = -\Omega dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m.$$

Vocemus duas classes systematis canonici elementorum, alteram, ipsas

amplectentem, *positivam classem*, alteram, ipsas b_1, b_2, ... b_m amplectentem *negativam classem*. Elementa bina a_i et b_i vocemus coniugata. Bina elementa coniugata systematis simul ex altera classi in alteram transeunt, si *alterius elementi signum mutatur*. Si functiones quascunque elementorum, quae ad alteram tantum classem pertinent, ut nova elementa illius classis introducere placet, facillime alterius classis elementa, quae novis illis coniugata sunt, determinantur. *Sint ex. gr. classis positivae elementa* a_1, a_2, ... a_m *expressa per alias quantitates* α_1, α_2, ... α_m, *quae ut nova elementa classis positivae spectentur; posito*

$$\beta_i = b_1\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2\frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m\frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i},$$

erit

$$dV = -\Omega\,dt + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \cdots + \beta_m d\alpha_m.$$

Unde considerari debent quantitates β_i *ut nova elementa alterius classis, eritque elementum* β_i *ipsi* α_i *conjugatum, sive erit:*

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i} = \frac{d\alpha_i}{dt}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i} = -\frac{d\beta_i}{dt}.$$

In propositione praecedente loco a_i, α_i ponere licet $-b_i$, $-\beta_i$ simulque loco b_i, β_i ponere a_i, α_i. Unde fluit altera propositio, *expressis* b_i *per alia elementa* β_i, *elementa classis positivae, ipsis* β_i *coniugata, fieri*

$$\alpha_i = a_1\frac{\partial b_1}{\partial \beta_i} + a_2\frac{\partial b_2}{\partial \beta_i} + \cdots + a_m\frac{\partial b_m}{\partial \beta_i}.$$

Si hunc transformationis modum una cum illo qui sola mutatione signi unius seu plurium elementorum efficitur, vicissim iterum iterumque adhibes, iam hac via simplicissima ex uno systemate elementorum canonico diversissima alia deducere licet.

Ut per methodum generalem supra traditam eruatur transformatio illa simplicissima, qua bina elementa coniugata, ex. gr. a_1 et b_1, alterum in alterius classem transeunt, statuatur

$$V_0 = a_1\alpha_1, \quad b_1 = \frac{\partial V_0}{\partial a_1} = \alpha_1;$$

erit

$$d(V - V_0) = -\Omega\,dt - a_1 d\alpha_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

quae docet aequatio, si loco ipsius a_1 introducatur $\alpha_1 = b_1$, elementum coniugatum

Transformationes antecedentes, variabili t et ipsa mutata, ad summam generalitatem perducuntur.

61.

In §§. 57., 59. transformationum aequationum differentialium partialium generalitatem eo restrinximus, quod unam variabilium independentium immutatam reliquimus. Quam restrictionem si missam facimus, ita agendum est.

Sit rursus

$$dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

atque V functio arbitraria ipsorum $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ atque novarum $a_1, a_2, \ldots a_m, \tau$: fit aequatio transformata

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

siquidem statuitur:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m.$$

Ex his aequationibus determinandae sunt $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, \tau$ atque valores eruti substituendi in expressione $\frac{\partial V}{\partial \tau}$, quo facto erit

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m$$

aequatio transformata. Si in modum §. 59. introducuntur aequationes $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ inter ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m, t, a_1, a_2, \ldots a_m, \tau$, nil in praecedentibus mutabitur, nisi quod loco ipsius V ponendum sit $V - \lambda_1 F - \lambda_2 \Phi - \cdots$, cuius expressionis differentialia partialia multiplicatorum $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ non continent differentialia, ut quae in expressiones $F, \Phi, \ldots$ evanescentes ducta sunt.

Ut e propositione praecedente generaliori deducatur casus, quo variabilis independens t immutata manet, scribatur in locum ipsius V expressio

$$V + (\tau - t) f_1,$$

designante V functionem ab ipsa t vacuam. Quo facto aequatio

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f_1$$

abit in

$$(\tau - t) \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,$$

unde deducitur

$$\tau = t.$$

Reiectis igitur post differentiationes factas terminis in $\tau - t$ ductis ut evanescentibus, mutato V in $V+(\tau-t)f_1$, abit $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ in $\frac{\partial V}{\partial \tau}+f_1$, differentialia $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ non mutantur. Unde si postremo t loco τ scribitur, facile patet, quomodo e praecedente propositione generaliori deducantur eae, quae §§. antecedentibus traditae sunt.

Si aequatio differentialis partialis proposita ipsam functionem quaesitam V_1 continet, ita agendum est. Sit

$$dV = -f dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m.$$

atque contineat f praeter variabiles t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m adhuc ipsam V; assumatur ipsarum V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, a_1, a_2, $\ldots$ a_m, τ functio quaelibet W; erit

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

siquidem statuitur:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial V} f, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \qquad \cdots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Ex his $2m+1$ aequationibus, advocata ipsa functionis W expressione ex arbitrio assumta, determinandae sunt V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m per W, τ, a_1, a_2, $\ldots$ a_m, b_1, b_2, $\ldots$ b_m, ac valores inventi in expressione ipsius $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ substituendi, quo facto aequatio differentialis praecedens erit aequatio transformata. Si inter ipsas V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, τ, a_1, a_2, $\ldots$ a_m aequationes $F=0$, $\Phi=0$, $\ldots$ locum habere statuis, tantum necesse est, ut in praecedentibus loco ipsius W ponatur $W+\lambda_1 F+\lambda_2 \Phi+\cdots$.

Haec sunt maxime generalia, quae de transformatione aequationum differentialium partialium primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium praecipere licet.

Agitur de usu integralis cuiuslibet systematis aequationum differentialium vulgarium, quod non eam in seriem integralium redeat, quam methodus supra proposita sibi poscat.

62.

Adnotavi supra §. 56., si principium conservationis arearum respectu certi cuiusdam plani locum habeat, unam variabilem cum eius differentiali prorsus ex aequationibus differentialibus abire, ideoque ordinem differentiationum unitatibus duabus diminui; idem vero, quod pro uno integrali illo fit, non evenire pro secundo et tertio integrali, quod datur, si principium conservationis arearum respectu *cuiuslibet* plani locum habet. Quaeramus iam, quemnam alium usum e tribus illis integralibus percipere liceat in ea integrationis via, quam supra proposuimus. Eum in finem antemitto has considerationes generales. Antea autem processum generalem integrationum, qualis e supra traditis habetur, paucis repetam.

Proposita integratione aequationum differentialium

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

in quibus f est data functio ipsarum $q_1, q_2, \cdots q_m, p_1, p_2, \cdots p_m$, e praeceptis supra traditis ita agendum erat.

Integrale *primum* sponte habetur per aequationem

$$f = a,$$

in qua a est constans arbitraria. Integrale *secundum* habetur $H_1 = a_1$, si datur functio H_1, quae identice satisfacit aequationi

$$(1.) \qquad 0 = [H_1, f],$$

siquidem semper statuitur

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}.$$

Iam e praeceptis traditis non integrale tertium quodcunque investigandum est seu functio H_2 quaecunque satisfaciat aequationi

$$[H_2, f] = 0,$$

sed eiusmodi functio H_2, quae duabus simul satisfaciat aequationibus,

$$(2.) \qquad [H_2, f] = 0, \quad [H_2, H_1] = 0.$$

Deinde investiganda erit functio H_3, quae tribus aequationibus

$$[H_3, f] = 0, \quad [H_3, H_1] = 0, \quad [H_3, H_2] = 0,$$

functio H_4, quae quatuor aequationibus

$$[H_4, f] = 0, \quad [H_4, H_1] = 0, \quad [H_4, H_2] = 0, \quad [H_4, H_3] = 0,$$

etc. etc., denique functio H_{m-1}, quae $m-1$ aequationibus

$$[H_{m-1}, f] = 0, \quad [H_{m-1}, H_1] = 0, \quad \ldots \quad [H_{m-1}, H_{m-2}] = 0$$

satisfaciat. His inventis functionibus, integratio completa aequationum differentialium propositarum ad meras quadraturas revocata erat. Scilicet sunt m integralia aequationum differentialium propositarum ipsae aequationes,

$$f = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

e quibus deinde si determinantur $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$, habentur $m-1$ reliqua integralia per formulas:

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} + b_1 \quad = 0,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} + b_2 \quad = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_{m-1}} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_{m-1}} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_{m-1}} dq_m \right\} + b_{m-1} = 0,$$

in quibus expressiones sub signo sunt differentialia completa, quorum igitur integratio nonnisi quadraturas poscit. Quantitates $a, a_1, \ldots a_{m-1}, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae.

Aequationes, quibus functio H_i definitur, ex iis quae supra §. 32 demonstravi, variis modis transformare licet. Scilicet in aequationibus

$$[H_i, f] = 0, \quad [H_i, H_1] = 0, \quad \ldots \quad [H_i, H_{i-1}] = 0$$

loco functionum $f, H_1, H_2, \ldots H_{i-1}$ alias quascunque ponere licet, in quas illae ope aequationum $f = a$, $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, $\ldots$ $H_{i-1} = a_{i-1}$ transformari possunt; nec non supponere licet, ope harum aequationum e functione quaesita H_i eliminatas esse quantitates $p_1, p_2, \ldots p_i$. Statuantur ope earundem aequationum eliminatas esse $p_1, p_2, \ldots p_i$ ex ipsa f omnes praeter p_1, ex ipsa H_1 omnes praeter $p_2, \ldots$ ex ipsa H_{i-1} omnes praeter p_i, singulis aequationibus $f = a$, $H_1 = a_1, \ldots H_{i-1} = a_{i-1}$ in singulis eliminationibus efficiendis respective reiectis. Tum aequationes, quibus H_i satisfacere debet, hae fiunt:

$$0 = \cdot[H_i, f] = \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

$$0 = [H_i, H_1] = \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_1}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_1}{\partial q_m},$$

. . . . . .

$$0 = [H_i, H_{i-1}] = \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_i} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_m}.$$

Sit e $f = a$ ipsa p_1, e $H_1 = a_1$ ipsa p_2, ... e $H_{i-1} = a_{i-1}$ ipsa p_i expressa p p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m; possunt aequationes praecedentes sic qu que exhiberi:

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m}.$$

Hae sunt aequationes (*d.*) §. 17, quarum docui supra integrationem simultaneam §§. 19, 20, primum quaerens functionem, quae aequationi primae, deinde qua duabus primis, deinde quae tribus primis etc. satisfaciat. Sed interdum fie potest, ut alia via determinandi functionem H_i commodius ineatur, cuius re exemplum simplicissimum prodam.

63.

Integratio simultanea binarum aequationum in theoria praecedente primum
nit in investigatione functionis H_2, quippe quae duabus aequationibus

$$[H_2, f] = 0, \quad [H_2, H_1] = 0$$

l satisfacere debet. E §. antec. hae duae aequationes ope integralium iam
ntorum $f = a$, $H_1 = a_1$ in duas alias transformandae sunt. Sed statuamus,
ationum differentialium propositarum praeter duo integralia illa $f = a$, $H_1 = a_1$
ri tertium:

$$\varphi = \text{Const.},$$

it identice sit

$$[\varphi, f] = 0,$$

formatio illa non adhibenda, sed haec investigandae ipsius H_2 ineunda via est.

Si habetur $[\varphi, H_1] = 0$, statui potest $H_2 = \varphi$ neque igitur ulteriore dis-
tione opus est. Casum quo $[\varphi, H_1]$ in valorem numericum, ex. gr. ± 1
, sive generalius in functionem ipsarum f, H, in sequentibus excludemus,
pe quo methodum supra traditam retinere convenit neque tertii integralis
nti usus erit. Quibus suppositis poterit sequente methodo e functione φ
H_2 derivari, pro qua, sicuti pro ipsa φ, sit $[H_2, f] = 0$, simul vero etiam
$H_1] = 0$. Ponamus:

$$[\varphi, H_1] = A_1, \quad [A_1, H_1] = A_2, \quad [A_2, H_1] = A_3, \quad \ldots,$$

e eo usque continuanda est novarum functionum formatio, donec perveniatur
unctionem $[A_{k-1}, H_1] = A_k$, quae antecedentium f, H_1, φ, A_1, A_2, $\ldots$ A_{k-1}
tio est

$$A_k = \Psi(f, H_1, \varphi, A_1, A_2, \ldots A_{k-1}),$$

e functio praeterea e variabilibus q_i, p_i nullam involvat. Sit F functio
quaecunque earundem quantitatum f, H_1, φ, A_1, A_2, $\ldots$ A_{k-1}, dico
um, haberi identice

$$[F, f] = 0.$$

iim ex aequatione identica generali (Theor. V, §. 26):

$$[[\psi, f], H_1] + [[f, H_1], \psi] + [[H_1, \psi], f] = 0$$

itur casu nostro, quo $[f, H_1] = 0$, aequatio:

$$[[\psi, f], H_1] + [[H_1, \psi], f] = 0.$$

In qua si loco ψ successive ponitur φ, A_1, A_2, A_3, $\ldots$, sequuntur,
n etiam sit ex hypothesi $[\varphi, f] = 0$, alia ex alia aequationes

$$[A_1, f] = 0, \quad [A_2, f] = 0, \quad \ldots \quad [A_{k-1}, f] = 0.$$

Porro fit

$$[F,f] = \frac{\partial F}{\partial f}[f,f]+\frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1,f]+\frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi,f]+\frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1,f]+\cdots+\frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1},f].$$

Unde, quum expressiones in singula differentialia partialia ipsius F multiplicatae identice evanescant, fit $[F,f]=0$, q. d. e.

Habetur secundo loco:

$$[F,H_1] = \frac{\partial F}{\partial f}[f,H_1]+\frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1,H_1]+\frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi,H_1] + \frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1,H_1]+\cdots+\frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1},H_1],$$

sive quum sit:

$$[f,H_1]=[H_1,H_1]=0,$$

$$[\varphi,H_1]=A_1, \quad [A_1,H_1]=A_2, \quad \ldots \quad [A_{k-1},H_1]=A_k=\Psi,$$

habetur

$$[F,H_1] = \frac{\partial F}{\partial \varphi}A_1+\frac{\partial F}{\partial A_1}A_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial A_{k-2}}A_{k-1}+\frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}\Psi.$$

Unde eruitur functio F, quae duabus aequationibus

$$[F,f]=0, \quad [F,H_1]=0$$

simul satisfacit, si ea indagatur ipsarum φ, A_1, A_2, ... A_{k-1} functio F, quae identice efficiat

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}A_1+\frac{\partial F}{\partial A_1}A_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial A_{k-2}}A_{k-1}+\frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}\Psi = 0,$$

qua in aequatione Ψ est data ipsarum φ, A_1, A_2, ... A_{k-1} functio. Ipsae f, H_1 in hac investigatione tamquam constantes considerari possunt, quippe secundum quas functio quaesita F non differentiatur. Qua de re in Ψ loco f, H_1 etiam earum valores constantes a, a_1 ponere licet.

Per regulas notas habetur F, si $F=$ Constans est integrale aequationum:

$$d\varphi : dA_1 : dA_2 : \ldots : dA_{k-2} : dA_{k-1} =$$
$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_{k-1} : \Psi,$$

quod systema locum tenet unius aequationis differentialis ordinis $(k-1)^{ti}$ inter duas variabiles. Quam, si introducitur elementum $d\tau$, etiam per hanc aequationem k^{ti} ordinis repraesentare licet:

$$\frac{d^k\varphi}{d\tau^k} = \Psi,$$

siquidem in expressione ipsius Ψ loco ipsarum A_1, A_2, ... A_{k-1} ponitur

$\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, ... $\frac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}}$, cuius aequationis si $F = \text{Const.}$ est integrale, invenitur functio quaesita H_2, si in F loco ipsarum $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, ... $\frac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}}$ restituuntur valores A_1, A_2, ... A_{k-1}. In hac quaestione usui est, quod *quantus sit ordo aequationis differentialis, cuius integrale unum inveniri debet ad determinandam functionem* $H_2 = F$, *totidem e duobus integralibus* $H_1 = a_1$, $\varphi = \text{Const.}$ *integralia nova aequationum differentialium propositarum derivare liceat.* Vidimus enim, si $k-1$ iste ordo sit, haberi integralia nova,

$$A_1 = \text{Const.}, \quad A_2 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad A_{k-1} = \text{Const.},$$

quae a se et a tribus integralibus datis independentia sunt. Qua re altioris integrationis incommodum quodammodo compensatur.

Patet antecedentibus, etsi integrale $\varphi = \text{Const.}$ non id sit, quod in serie integralium secundum methodum a me propositam successive investigandorum ut integrale tertium adhiberi possit, eius integralis tamen cognitionem investigationem tertii integralis $H_2 = \text{Const.}$ plurimum adjuvare, siquidem expressio $[H_1, \varphi]$ non in numerum redit alium atque zero, neque in ipsarum f, H_2 functionem.

Praecedentia applicantur ad investigandum usum trium integralium quae conservationem arearum concernunt in aequationibus dynamicis secundum methodum supra propositam integrandis.

64.

Praemissis considerationibus praecedentibus generalibus, revertor ad propositum; quaerimus enim usum, quem in integratione nostra percipere liceat e tribus integralibus, quae principium conservationis arearum concernunt. In applicationibus ad Dynamicam est $f = a$ aequatio, qua principium conservationis virium vivarum continetur. Sint $H_1 = a_1$, $\varphi = \text{Const.}$ aequationes binae e tribus, quae principium arearum constituunt, sive tribus expressionibus

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right)$$

exhibitis per quantitates q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m, sit

Demonstravi supra §. 51 (2.), haberi

$$[\varphi, \psi] = H_1, \quad [\psi, H_1] = \varphi, \quad [H_1, \varphi] = \psi.$$

Hinc secundum praecepta §. antec. tradita, si statuitur $[\varphi, H_1] = A_1$, $[A_1, H_1] = A_2$, fit $A_1 = -\psi$, $A_2 = -\varphi$, ideoque $k = 2$, $A_k = \Psi = -\varphi$.

Ponendum jam est:

$$d\varphi : dA_1 = A_1 : A_2$$

sive

$$d\varphi : -d\psi = -\psi : -\varphi,$$

sive

$$\varphi d\varphi + \psi d\psi = 0,$$

cuius aequationis habetur integrale:

$$H_2 = \varphi\varphi + \psi\psi = \text{Const.}.$$

Casu igitur proposito aequatio differentialis, cuius integrale inveniri debebat ad determinandam H_2, tantum *primum* ordinem ascendebat, eratque aequationum differentialium propositarum *unum* tantum integrale novum $\psi = \text{Const.}$, quod e dato $\varphi = \text{Const.}$ derivari poterat. Aequatio illa primi ordinis quum sine negotio integrata sit, habemus, si tria integralia principii arearum locum habent, duas functiones H_1, H_2, quae identice satisfaciunt aequationibus:

$$[f, H_1] = 0, \quad [f, H_2] = 0, \quad [H_1, H_2] = 0.$$

Loco H_2 etiam aliam quamlibet functionem ipsarum f, H_1, H_2 ponere licet, ex. gr. functionem

$$H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi},$$

quae plerumque commodiores formulas suppeditat. Invento quolibet integrali $H_i = \text{Const.}$ in serie integralium secundum methodum propositam investigandorum, supra vidimus §. 22 ordinem systematis aequationum differentialium, quae integrandae restant, unitatibus duabus diminui. Hinc introducto uno integrali $H_2 = \text{Const.}$ in locum duorum $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$, nihil nos profecisse videri potest, quum etiam duobus integralibus *quibuscunque* inventis aequationum differentialium propositarum ordo duabus unitatibus diminuatur. Sed hoc interest discrimen, quod introducto uno integrali $H_2 = \text{Const.}$ methodum nostram integrationum adhibere liceat, qua quolibet novo integrali $H_i = \text{Const.}$ invento ordo differentiationum duabus unitatibus diminuitur. Sed melius adhuc methodi propositae indoles his considerationibus perspicitur.

Demonstravi supra §. 56 modo particulari, quod etiam e theoria proposita generali peti poterat, quoties unum integrale

$$H_1 = \Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt}$$

locum habeat, ope huius integralis unam variabilem v_n una cum eius differentiali $\frac{dv_n}{dt}$ ex aequationibus differentialibus propositis prorsus abire, unde ordo differentiationum duabus unitatibus minuitur. Scilicet posito $v_i = u_i + v_n$ et eliminata $\frac{dv_n}{dt}$ ope aequationis praecedentis, variabilium $v_1, v_2, \ldots v_n$ eorumque differentialium solae differentiae $u_i, \frac{du_i}{dt}$ in aequationibus differentialibus propositis remanent. At ne hoc, quod ea ratione lucramur, commodum rursus perdamus, necesse est, ut ad reductionem ulteriorem ordinis differentiationum ea tantum adhibeamus integralia, quae et ipsa variabilium $v_1, v_2, \ldots v_n$ non nisi differentias continent. Id quod in integralibus duobus reliquis, quae ad principium conservationis arearum pertinent,

$$\varphi = \text{Const.}, \quad \psi = \text{Const.},$$

in quibus

$$\varphi = \Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \Sigma m_i\left\{\sin v_i\left(r_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dr_i}{dt}\right) - z_i r_i \cos v_i \frac{dv_i}{dt}\right\},$$

$$\psi = \Sigma m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) = \Sigma m_i\left\{-\cos v_i\left(r_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dr_i}{dt}\right) - z_i r_i \sin v_i \frac{dv_i}{dt}\right\},$$

locum non habet. Qua de re pro his duobus integralibus certa eorum combinatio adhibenda est, in qua angulorum $v_1, v_2, \ldots v_n$ non nisi differentiae obveniunt. Cuiusmodi combinatio est aequatio

$$\varphi\varphi + \psi\psi = \text{Const.}.$$

Habetur enim, designante e basin logarithmorum naturalium,

$$\psi + \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_i e^{-v_i\sqrt{-1}}\left\{z_i\frac{dr_i}{dt} - r_i\frac{dz_i}{dt} - \sqrt{-1}\,.\,z_i r_i\frac{dv_i}{dt}\right\},$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_k e^{+v_k\sqrt{-1}}\left\{z_k\frac{dr_k}{dt} - r_k\frac{dz_k}{dt} + \sqrt{-1}\,.\,z_k r_k\frac{dv_k}{dt}\right\},$$

sive posito

$$z_i = \varrho_i\cos\eta_i, \qquad r_i = \varrho_i\sin\eta_i,$$

habetur:

$$\psi + \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_i e^{-v_i\sqrt{-1}}\varrho_i^2\left\{\frac{d\eta_i}{dt} - \sqrt{-1}\,.\cos\eta_i\sin\eta_i\frac{dv_i}{dt}\right\},$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_k e^{+v_k\sqrt{-1}}\varrho_k^2\left\{\frac{d\eta_k}{dt} + \sqrt{-1}\,.\cos\eta_k\sin\eta_k\frac{dv_k}{dt}\right\};$$

unde

$$\psi\psi+\varphi\varphi =$$

$$\Sigma m_i m_k e^{-(v_i-v_k)\sqrt{-1}}\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\frac{d\eta_i}{dt}-\sqrt{-1}\,.\cos\eta_i\sin\eta_i\frac{dv_i}{dt}\right\}\left\{\frac{d\eta_k}{dt}+\sqrt{-1}\,.\cos\eta_k\sin\eta_k\frac{dv_k}{dt}\right\},$$

ipsis i et k in summa duplici praecedente tributis valoribus $1, 2, \ldots n$, siquidem rursus n est numerus punctorum materialium, quorum motus determinandus proponitur. Quam summam patet ipsarum $v_1, v_2, \ldots v_n$ solas differentias continere. Quae ut etiam ipsarum $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \ldots \frac{dv_n}{dt}$ solas differentias contineat, facile efficitur adiumento aequationis

$$H_1 = \Sigma m_i r_i^2\frac{dv_i}{dt} = \Sigma m_i\varrho_i^2\sin^2\eta_i\frac{dv_i}{dt} = \text{Const.}.$$

Imaginariis eiectis, aequatio praecedens in hanc abit:

$$\psi\psi+\varphi\varphi =$$

$$\Sigma m_i m_k\cos(v_i-v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\frac{d\eta_i}{dt}\frac{d\eta_k}{dt}+\tfrac{1}{4}\sin 2\eta_i\sin 2\eta_k\frac{dv_i}{dt}\frac{dv_k}{dt}\right\}$$

$$+\Sigma m_i m_k\sin(v_i-v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\tfrac{1}{2}\sin 2\eta_k\frac{d\eta_i}{dt}\frac{dv_k}{dt}-\tfrac{1}{2}\sin 2\eta_i\frac{d\eta_k}{dt}\frac{dv_i}{dt}\right\},$$

quam data occasione adnotare placet formulam.

Quum antecedentibus casu proposito pateat, in ipsa integratione aequationum differentialium propositarum in locum duorum integralium $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ adhibendam esse unicum $\varphi\varphi+\psi\psi = \text{Const.}$, quaeritur, quinam usus sit integralis $\varphi = \text{Const.}$ sive $\psi = \text{Const.}$, quod praeter integrale hoc $\varphi\varphi+\psi\psi = \text{Const.}$ habetur. Cuius is est usus, quod eius integralis beneficio *quadraturae* supersedeatur. Sint enim $H_1 = a_1$, $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$, tria integralia, quae principium conservationis arearum constituunt, designantibus a_1, a_2, β constantes arbitrarias. Inventis omnibus aequationibus integralibus inter quantitates r_i, u_i, z_i, $\frac{dr_i}{dt}$, $\frac{du_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$, invenitur $\frac{dv_n}{dt}$ ope aequationis

$$H_1 = \Sigma m_i r_i^2\frac{dv_i}{dt} = \alpha$$

per formulam supra traditam §. 56 (1.):

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\alpha-\Sigma m_i r_i^2\frac{du_i}{dt}}{\Sigma m_i r_i^2}.$$

E qua formula per quadraturam valor ipsius v_n eruendus foret, cui tamen per aequationem $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$ sive $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$ sive aliam ex iis conflatam super-

letur. Fit enim, advocatis ipsorum φ, ψ expressionibus supra traditis:

$$\cos v_n + \psi \sin v_n = \sqrt{a_2}\cos(v_n - \beta) = \Sigma m_i \left\{ \sin u_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) - z_i r_i \cos u_i \frac{dv_i}{dt} \right\},$$

$$\sin v_n - \psi \cos v_n = \sqrt{a_2}\sin(v_n - \beta) = \Sigma m_i \left\{ \cos u_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) + z_i r_i \sin u_i \frac{dv_i}{dt} \right\}.$$

arum aequationum alterutra post substitutionem valorum $\frac{dv_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{dv_n}{dt}$,
i iam pro datis habentur, determinatur v_n sine quadratura.

monstratur, quodvis problema mechanicum, quo principia conservationis virium vivarum et arearum valeant, atque in quo positio systematis a tribus tantum quantitatibus pendeat, ad quadraturas revocari.

65.

Considerationibus praecedentibus aestimari potest, quae methodo pro-osita lucramur, si in problemate mechanico praeter principium conservationis irium vivarum tria integralia locum habent, quae principium conservationis rearum concernunt. Systematis aequationum differentialium propositi

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

st ordo $2m-1$, qui per integrale $f = a$ revocatur ad ordinem $2m-2$, ac per ia integralia principii arearum $H_1 = a_1$, $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$, ad or-inem $2m-5$. Nam licet iam per duo integralia $f = a$, $H_1 = a_1$ aequationes roppositae ad ordinem $2m-4$ revocentur, ponendo $v_i = v_n + u_i$ et eliminando ifferentiale $\frac{dv_n}{dt}$, ipsa v_n ex aequationibus differentialibus sponte abeunte, ad-otavi tamen, ne ipsa V_n in aequationes differentiales redeat, loco integralium $= \sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$ unicum tantum $\varphi\varphi + \psi\psi = a_2$ adhiberi posse, ideoque ntum unitate ordo $2m-4$ adhuc diminuetur. At methodo nostra, qua inte-rale quodlibet datis considerationibus satisfaciens ordinem differentiationum itatibus duabus diminuit, fit ut duobus integralibus $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$ adhibitis, ippe pro quibus identice habetur

$$[H_1, f] = 0, \quad [H_2, f] = 0, \quad [H_1, H_2] = 0,$$

do $2m-2$ *revocetur ad ordinem* $2m-6$. Fluit igitur casu speciali, quo $= 3$, e methodo tradita propositio memorabilis:

Quodlibet problema mechanicum, pro quo principia conservationis virium vivarum et arearum locum habent, et in quo positio geometrica systematis tribus quantitatibus determinatur, ad quadraturas revocari potest.

Propositio praecedens paullum a gravitate sua eo amittit, quod, ni vehementer fallor, nullum extat problema mechanicum, pro quo dicta principia generalia locum habeant, et in quo positio systematis a tribus quantitatibus pendeat, praeter duo illa motus puncti versus centrum fixum attracti et rotationis corporis solidi nullis viribus sollicitati circa punctum eius fixum. Horum autem problematum solutio completa iam ex longo temporis intervallo inter Analystas constat. At posterioris certe problematis reductio ad quadraturas extolli solet ut pulcherrimus gloriae titulus, quem adepti sint Analystae decimi octavi saeculi, qui tamen aequationum differentialium integrationem perbene calluerunt. Et postea magnas laudes iustamque admirationem meruit ill. *Lagrange*, qui istam ad quadraturas problematis reductionem vel sine advocatis axium principalium corporum proprietatibus, quibus *Euleri* analysis nitebatur, suscipere ausus fuerit; id quod pro splendida ac paene luxuriante artis manifestatione habeatur. Quae de re fortasse non displicebit Analystis, quod hic non tantum sine auxilio proprietatum axium principalium, sed adeo sine certa variabilium electione — quid? quod sine formatione aequationum differentialium problemati illi particularium, reductio ad quadraturas efficiatur, nulla re in subsidium vocata, nisi quod in problemate assignato principia generalia mechanica valeant.

Operae pretium videtur, *simultaneam* duorum problematum mechanicorum, de quibus dixi, reductionem ad quadraturas, secundum methodum traditam generalem efficiendam, accuratius exponere. Si motus propositi perturbantur, eadem analysis sine ulteriore calculo differentialia elementorum perturbatorum suppeditat (§. 52).

Solutio simultanea problematis de motu puncti versus centrum fixum attracti atque problematis de rotatione corporis solidi nullis viribus sollicitati circa punctum fixum, una cum expressionibus differentialibus elementorum perturbatorum utriusque problematis.

66.

Eligatur modus quicunque, in altero problemate positionem puncti in spatio, in altero positionem corporis solidi circa punctum eius fixum determinandi, quod fit in utroque per quantitates tres, quas voco q_1, q_2, q_3. Si $\frac{dq_1}{dt} = q_1'$, $\frac{dq_2}{dt} = q_2'$, $\frac{dq_3}{dt} = q_3'$, ac expressa semisumma virium vivarum T per q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', sit

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3.$$

Ponamus, $H = a$ esse aequationem principium conservationis virium vivarum

constituentem, atque $H_1 = a_1$, $\varphi = a_1'$, $\psi = a_1''$ esse tres aequationes, quae principium conservationis arearum repraesentant respectu trium planorum inter se orthogonalium, in altero problemate per centrum attractionis, in altero per punctum fixum corporis ductorum.

Quantitates a, a_1, a_1', a_1'', sunt constantes arbitrariae, quae ipsas functiones H, H_1, φ, ψ non afficiunt. Expressis H, H_1, $H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi}$ per quantitates q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, atque ex aequationibus

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2,$$

in quibus $a_2 = \sqrt{a_1 a_1 + a_1' a_1' + a_1'' a_1''}$ determinatis quantitatibus p_1, p_2, p_3 per q_1, q_2, q_3, est $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$ differentiale completum, positoque

$$\int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3\} = V,$$

ac designantibus a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 constantes arbitrarias, evadunt e §§. 33., 34. aequationes:

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a} dq_3 \right\} = t + b,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_1} dq_3 \right\} = b_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_2} dq_3 \right\} = b_2$$

integralia completa utriusque problematis propositi, eruntque tres aequationes postremae aequationes finitae problematum.

Si motus propositi perturbantur atque in problematibus perturbatis aequatio concernens principium conservationis virium vivarum fit

$$H + \Omega = \text{Const.},$$

sunt e §. 52. differentialia elementorum perturbatorum data per formulas:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_2},$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_2}.$$

Iam olim ill. *Poisson* in Commentatione praeclara Actis Academiae Parisiensis anni 1816 inserta expressiones differentiales elementorum perturbatorum pro utroque problemate communi analysi investigari posse demonstravit. Sed ipsa problemata duo imperturbata eadem analysi hic primum, quantum credo, amplexus sum.

Iam certa variabilium electione facta ... problemate seorsim evolvam.

De motu puncti versus centrum fixum attracti secundum legem Neutonianam; formulae differentiales elementorum perturbatorum.

67.

Sint $\varrho\cos\eta$, $\varrho\sin\eta\cos\upsilon$, $\varrho\sin\eta\sin\upsilon$ coordinatae orthogonales puncti attracti, spectato centro fixo ut initio coordinatarum; posito $\frac{d\varrho}{dt}=\varrho'$, $\frac{d\upsilon}{dt}=\upsilon'$, $\frac{d\eta}{dt}=\eta'$, massaque corporis $=1$, fit, designante $\varkappa^2$ vim attractivam pro unitate distantiae:

$$(1.)\quad \begin{cases} H = \frac{1}{2}\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\varrho^2\sin^2\eta.\upsilon'\upsilon'\}-\frac{\varkappa^2}{\varrho}=a, \\ H_1=\varrho^2\sin^2\eta.\upsilon'=a_1, \\ H_2=\{H_1H_1+\varphi\varphi+\psi\psi\}^{\frac{1}{2}}=\varrho^2\{\eta'\eta'+\sin^2\eta.\upsilon'\upsilon'\}^{\frac{1}{2}}=a_2. \end{cases}$$

Quae notae sunt formulae et facillime probantur. Quantitates ϱ, η, υ hic ... eaedem, quas §. antec. per q_1, q_2, q_3 denotavi. Fit porro

$$T=\tfrac{1}{2}\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\varrho^2\sin^2\eta.\upsilon'\upsilon'\},$$

unde $\frac{\partial T}{\partial\varrho'}=\varrho'$, $\frac{\partial T}{\partial\eta'}=\eta_1=\varrho^2\eta'$, $\frac{\partial T}{\partial\upsilon'}=\upsilon_1=\varrho^2\sin^2\eta.\upsilon'$.

Quantitates ϱ', η_1, υ_1 hic eaedem sunt atque §. antec. per p_1, p_2, p_3 denotatae.

Eliminata υ', fit e (1.):

$$a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}=\tfrac{1}{2}\left\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\frac{a_1a_1}{\varrho^2\sin^2\eta}\right\},$$

$$a_2^2=\varrho^4\eta'\eta'+\frac{a_1a_1}{\sin^2\eta},$$

unde

$$(2.)\quad \begin{cases} \varrho' = \left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_1=\varrho^2\eta'=\left\{a_2^2-\frac{a_1a_1}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \upsilon_1=\varrho^2\sin^2\eta.\upsilon'=a_1. \end{cases}$$

His substitutis valoribus fit

$$(3.)\quad \begin{cases} V=\int\left\{\varrho'd\varrho+\eta_1d\eta+\upsilon_1d\upsilon\right\} \\ \quad=\int\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}d\varrho+\int\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta+a_1\upsilon. \end{cases}$$

lic non tantum patet, quod generaliter probavimus, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots$$

ifferentiale exactum esse, sed ea, qua usi sumus, variabilium electione id ffectum esse videmus, ut in expressione illa differentiali adeo variabiles se- aratae sint. Idem evenit pro lege attractionis quacunque, quae si exprimitur er functionem $-\frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho}$, tantum opus est, ut in expressione ipsius V ante- edente loco ipsius $\frac{x^2}{\varrho}$ ponatur $f(\varrho)$.

Ex aequatione (3.) fluunt secundum praecepta §. antec. tradita integralia iita problematis:

$$(4.)\quad t+b = \frac{\partial V}{\partial a} = \int \frac{d\varrho}{\left\{2\left(a+\frac{x^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$(5.)\quad b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1} = -\int \frac{a_1 d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}} \sin^2\eta} + v,$$

$$(6.)\quad b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2} = a_2 \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} - a_2 \int \frac{1}{\left\{2\left(a+\frac{x^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

it primum

$$(7.)\quad \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\sin\eta\, d\eta}{\{a_2^2 - a_1^2 - a_2^2\cos^2\eta\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a_2} \operatorname{Arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2-a_1^2}} \cdot \cos\eta\right),$$

orro e (5.) habetur:

$$(8.)\quad v - b_1 = -\int \frac{a_1 d\operatorname{ctg}\eta}{\{a_2^2 - a_1^2 - a_1^2 \operatorname{ctg}^2\eta\}^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{Arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2-a_1^2}} \cdot \operatorname{ctg}\eta\right),$$

nde

$$(9.)\quad \operatorname{ctg}\eta = \sqrt{\frac{a_2^2-a_1^2}{a_1^2}} \cdot \cos(v - b_1).$$

Deinde erit:

$$(10.)\quad \int \frac{a_2}{\left\{2\left(a+\frac{x^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \int \frac{a_2^2}{\left\{x^4 + 2aa_2^2 - \left(x^2 - \frac{a_2^2}{\varrho}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2} = u,$$

iquidem statuitur

$$(11.)\quad \frac{a_2^2}{\varrho} - x^2 = \sqrt{x^4 + 2aa_2^2} \cdot \cos u.$$

ubstitutis (7.) et (10.), aequatio (6.) in hanc abit:

$$(12.)\quad b_2 = \operatorname{Arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2-a_1^2}} \cdot \cos\eta\right) - u,$$

unde

$$(13.) \qquad \cos\eta = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2}} \cdot \cos(u + b_2).$$

Denique habetur e (4.):

$$t + b = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{2a\varrho^2 + 2x^2\varrho - a_2^2}} = \int \frac{\sqrt{-2a}.\varrho\, d\varrho}{\{x^4 + 2aa_2^2 - (2a\varrho + x^2)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

sive posito

$$(14.) \qquad x^2 + 2a\varrho = \sqrt{x^4 + 2aa_2^2}.\cos E,$$

fit

$$(15.) \qquad t + b = \frac{1}{\sqrt{-2a}} \int \varrho\, dE = \frac{x^2 E}{(-2a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{x^4 + 2aa_2^2}}{(-2a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin E.$$

Ut aequationes inventae induant formam simpliciorem, pro constantibus bitrariis adhibitis alias introducam. Sit

$$(16.) \qquad \sqrt{1 + \frac{2aa_2^2}{x^4}} = e, \quad a = -\frac{x^2}{2A}, \quad \mu = \frac{(-2a)^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x}{A^{\frac{3}{2}}},$$

fiunt (14.), (11.), (15.):

$$(17.) \quad \varrho = A(1 - e.\cos E), \quad \frac{A(1-ee)}{\varrho} = 1 + e.\cos u, \quad \mu(t+b) = E - e.\sin$$

E quibus aequationibus patet, quantitates E, u, $\mu(t+b)$, A, e, $-b$, $\frac{a_2}{x}$ *anomaliam excentricam, anomaliam veram, anomaliam mediam, semi maiorem, excentricitatem, tempus perihelii, radicem quadraticam semiparan*

Ponamus porro:

$$(18.) \qquad \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2}} = \operatorname{tg} i, \quad \text{unde} \quad \frac{a_1}{a_2} = \cos i,$$

fit e (9.)

$$(19.) \qquad \cos i \cos\eta = \sin i \sin\eta \cos(v - b_1),$$

quae docet aequatio orbitam puncti attracti esse planam atque designa *inclinationem orbitae* atque b_1 *longitudinem nodi ascendentis orbitae* ide erit $\frac{a_1}{x}$ aequale *radici quadraticae semiparametri multiplicatae per cosi inclinationis orbitae.* Unde iam quinque constantes arbitrariae a, a_1, a_2, b significationem geometricam invenerunt. Restat aequatio (13.) quae e (i in hanc abit:

$$(20.) \qquad \cos\eta = \sin i \cos(u + b_2) = \sin i.\sin\left(u + \frac{\pi}{2} + b_2\right).$$

Haec formula docet, esse $\frac{\pi}{2} + b_2$ *distantiam perihelii a nodo ascendente.*

E theoremate §. 66 proposito fiunt differentialia elementorum perturbatorum:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2},$$

quibus in formulis est

$\frac{-\varkappa^2}{2a}$ ··· semiaxis major,

$\frac{a_1}{\varkappa}$ ··· radix quadratica semiparametri multiplicata per cosinum inclinationis,

$\frac{a_2}{\varkappa}$ ··· radix quadratica semiparametri,

$-b$ ··· tempus perihelii,

b_1 ··· longitudo nodi ascendentis,

$\frac{\pi}{2} + b_2$ ··· distantia perihelii a nodo ascendente.

Designante igitur, ut notationem usitatiorem adhibeam, A semiaxem maiorem, k radicem quadraticam semiparametri, i inclinationem, τ tempus perihelii, Ω longitudinem nodi ascendentis, ϖ distantiam eius a perihelio, fiunt formulae differentiales elementorum perturbatorum:

$$(21.) \quad \begin{cases} \varkappa^2 \frac{dA}{dt} = 2A^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, & \varkappa^2 \frac{d\tau}{dt} = -2A^2 \frac{\partial\Omega}{\partial A}, \\ \varkappa \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h}, & \varkappa \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}, \\ \varkappa \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial . h\cos i}, & \varkappa \frac{d.h\cos i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}. \end{cases}$$

quae formulae aequivalent aequationibus differentialibus sequentibus, in quibus $\varrho = \sqrt{xx+yy+zz}$:

$$(22.) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 x}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 y}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 z}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

in quibus Ω data est functio ipsarum x, y, z, t, vel adeo aequationibus differentialibus generalioribus sequentibus:

$$(23.)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' + \frac{\partial\Omega}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt} = -\frac{x^3 x}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = y' + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt} = -\frac{x^3 y}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} = z' + \frac{\partial\Omega}{\partial z'}, & \frac{dz'}{dt} = -\frac{x^3 z}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

in quibus Ω est data functio ipsarum t, x, y, z, x', y', z'. Per varias methodos supra traditas ex elementorum canonicorum systemate proposito innumera alia facillime derivantur.

Si placet, quod in calculis commodius est, in locum temporis peribel ut elementum introducere *epocham* seu *valorem anomaliae mediae pro* $t=0$,

$$c = -\mu\tau = \mu b,$$

facile deducitur e (21.):

$$x\frac{dc}{dt} = 2A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Omega}{\partial A}, \qquad x\frac{dA}{dt} = -2A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Omega}{\partial c},$$

reliquis formulis (21.) immutatis manentibus.

Quaeramus adhuc ipsius functionis V expressionem finitam. Fit

$$\left\{2\left(a+\frac{x^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{xe}{\sqrt{A}}\frac{\sin E}{1-e\cos E},$$

$$d\varrho = Ae\sin E\, dE,$$

unde

$$\int\left\{2\left(a+\frac{x^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}d\varrho = xe^2\sqrt{A}\int\frac{\sin^2 E\, dE}{1-e\cos E}$$

$$= x\sqrt{A}\left\{E+e\sin E-2\sqrt{1-e^2}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)\right\}.$$

Fit porro, posito $a_2 = xh = x\sqrt{A(1-e^2)}$,

$$\int\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta = xh\int\left\{1-\frac{\cos^2 i}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta$$

$$= xh\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{\cos\eta}{\sin i}\right) - xh\cos i\operatorname{Arc\,cos}(\operatorname{ctg} i\operatorname{ctg}\eta).$$

Unde

$$V = x\sqrt{A}\left\{E+e\sin E-2\sqrt{1-e^2}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)\right\}+xh\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{\cos\eta}{\sin i}\right)$$

$$+xh\cos i\left\{v-\operatorname{Arc\,cos}(\operatorname{ctg} i\operatorname{ctg}\eta)\right\}.$$

In differentianda hac expressione secundum constantes arbitrarias A, e, i, quae in locum ipsarum a, a_1, a_2 introduci possunt, adhibendae sunt aequationes:

$$0 = 1-e\cos E+Ae\sin E\frac{\partial E}{\partial A},$$

$$0 = \cos E-e\sin E\frac{\partial E}{\partial e},$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial i}.$$

Integrationes antecedentibus factae sunt respective inde a limitibus $\varrho = A(1-e)$, $\eta = \frac{\pi}{2} - i$. Quorum limitum in differentianda V secundum constantes arbitrarias respectum non habuimus. Scilicet quia in expressione V termini sub signo integrationis pro limitibus illis evanescunt, unde facile patet, terminos e limitum variatione prodeuntes evanescere ideoque negligi posse.

De methodo proposita in varia problemata applicanda, ac praesertim in problemata isoperimetrica.

68.

Methodus generalis etiam facillime applicatur problemati celeberrimo de puncto versus duo puncta fixa, quorum datae sunt massae, secundum legem Neutonianam attracto. In cuius solutione occupatus invenerat *Eulerus* praeter integralia duo a principiis conservationis virium vivarum et arearum suppeditata integrale tertium, quo problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles revocabatur. At summo viri egregii acumine et intrepido animo indigebat, ut per varia tentamina aequationis differentialis complicatissimae reductio ad quadraturas succederet. Nostra methodo per regulam generalem absque omni calculo instituendo aequatio differentialis revocari potuisset ad quadraturas. Determinatis enim e tribus illis integralibus x', y', z' per x, y, z et tres constantes arbitrarias a, a_1, a_2, quas principia conservationis virium vivarum et arearum et integrale ab *Eulero* inventum involvunt, erunt aequationes tres:

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a} dx + \frac{\partial y'}{\partial a} dy + \frac{\partial z'}{\partial a} dz \right\} = t + b,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a_1} dx + \frac{\partial y'}{\partial a_1} dy + \frac{\partial z'}{\partial a_1} dz \right\} = b_1,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a_2} dx + \frac{\partial y'}{\partial a_2} dy + \frac{\partial z'}{\partial a_2} dz \right\} = b_2,$$

in quibus expressiones sub signis integrationum differentialia exacta sunt, problematis propositi aequationes finitae. Nec non etiam huius problematis sine ullo calculo per propositiones nostras generales habentur formulae perturbatoriae.

Quoties in problemate mechanico, in quo principium conservationis virium vivarum valet, positio systematis duabus quantitatibus a se independentibus q_1, q_2 determinatur — quod ex. gr. evenit, puncto supra datam superficiem *in linea brevissima* moto — nova methodo integrandi aequationes

differentiales partiales primi ordinis non egebat, sed sufficit *Lagrangiana*, quae de tribus variabilibus pro perfecta haberi potest. Problemata eiusmodi pendent ab integratione aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles, quae, si praeter dictum principium alterum innotescit integrale

$$f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = a_1,$$

revocatur ad ordinem primum. Sed secundum methodum nostram generalem vel etiam secundum ipsam methodum *Lagrangianam* integrandi aequationes differentiales partiales primi ordinis inter tres variabiles, *haec aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles semper ad quadraturas revocare potest.* Sit enim $f = a$ aequatio pro viribus vivis, eruantur ipsarum p_1, [illegible] valores ex aequationibus $f = a$, $f_1 = a_1$, determinabit aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 \right\} = b_1$$

positionem systematis, sive pro puncto singulo, in data superficie moto, eius *orbitam*, atque altera aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 \right\} = b + t$$

positionis tempus. In hunc casum, qui tantum integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis inter variabiles *tres* requirit, in qua una variabilium, functio quaesita, ipsa non obvenit, exempla praecedentibus allegata redeunt. Nam introducendo coordinatas polares per integrale a principio conservationis arearum petitum unam variabilem simul atque differentiale partiale secundum eam sumtum ex aequatione differentiali partiali eliminare licet, unde tres variabiles independentes ad duas revocantur atque aequatio differentialis partialis, a cuius integratione problema pendet, ad aliam iam apud ill. *Lagrange* tractatam.

Notum est, aequationes differentiales vulgares *lineares* secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas esse, ut post alterum integrale inventum alterum tantum a quadraturis pendeat. Problemata mechanica videmus ducere ad alias aequationes differentiales vulgares secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas, ut post alterum integrale inventum alterum a solis quadraturis pendeat, et quae neutiquam sunt lineares.

Cuiusmodi ex. gr. est aequatio differentialis notissima, quae lineam brevissimam in data superficie concernit, quippe quam describit punctum in superficie data moveri coactum et a viribus nullis acceleratricibus sollicitatum; unde habetur propositio:

aequationis differentialis secundi ordinis, a qua linea brevissima pendet, si integrale unum inventum est, lineae determinatio ad solas quadraturas revocatur.

Cuius propositionis exemplа suggerunt lineae brevissimae in superficiebus **rotundis**, conicis, cylindricis, in quibus integrale unum sponte se offert. Ac **generalius**, quod diximus, valebit de aequationibus differentialibus secundi **ordinis**, a quibus pendent problemata, integralia huiusmodi

$$\int \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

maxima vel ***minima*** reddere. Facile autem patet e supra traditis, exhibendo **problemata** mechanica hic tractata sub forma

$$\delta \int (T+U)\, dt = 0,$$

methodum propositam omnibus problematibus isoperimetricis adhiberi posse, in **quibus** expressio sub signo integrationis quemlibet functionum incognitarum **numerum** earumque differentialia prima involvat. Posito enim $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$, si **proponitur** aequatio:

$$\delta \int \varphi(t, q_1, q_2, \dots q_m, q_1', q_2', \dots q_m')\, dt = 0,$$

ponatur

$$H = q_1' \frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} + \dots + q_m' \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi,$$

atque eliminentur ex hac expressione ipsae q_1', q_2', $\dots$ q_m' per aequationes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} = p_m.$$

Quo facto pendebit problema, quod facile e regulis notis calculi variationum **comprobatur**, atque ex ipsa analysi elucet, quam apud ill. *Hamilton* invenis, **ab integratione** completa systematis aequationum differentialium vulgarium se**quentium**:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Quam integrationem completam demonstravi obtineri per integrationem com**pletam** aequationis differentialis partialis

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

differentiales partiales primi ordinis non egebat, sed sufficit *Lagrangiana*, quae de tribus variabilibus pro perfecta haberi potest. Problemata eiusmodi pendent ab integratione aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles, quae, si praeter dictum principium alterum innotescit integrale

$$f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = a_1,$$

revocatur ad ordinem primum. Sed secundum methodum nostram generalem vel etiam secundum ipsam methodum *Lagrangianam* integrandi aequationes differentiales partiales primi ordinis inter tres variabiles, *haec aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles semper ad quadraturas revocari potest.* Sit enim $f = a$ aequatio pro viribus vivis, eruantur ipsarum p_1, p_2 valores ex aequationibus $f = a$, $f_1 = a_1$, determinabit aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 \right\} = b_1$$

positionem systematis, sive pro puncto singulo, in data superficie moto, eius *orbitam*, atque altera aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 \right\} = b + t$$

positionis tempus. In hunc casum, qui tantum integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis inter variabiles *tres* requirit, in qua una variabilium, functio quaesita, ipsa non obvenit, exempla praecedentibus allegata redeunt. Nam introducendo coordinatas polares per integrale a principio conservationis arearum petitum unam variabilem simul atque differentiale partiale secundum eam sumtum ex aequatione differentiali partiali eliminare licet, unde tres variabiles independentes ad duas revocantur atque aequatio differentialis partialis, a cuius integratione problema pendet, ad aliam iam apud ill. *Lagrange* tractatam.

Notum est, aequationes differentiales vulgares *lineares* secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas esse, ut post alterum integrale inventum alterum tantum a quadraturis pendeat. Problemata mechanica videmus ducere ad alias aequationes differentiales vulgares secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas, ut post alterum integrale inventum alterum a solis quadraturis pendeat, et quae neutiquam sunt lineares.

Cuiusmodi ex. gr. est aequatio differentialis notissima, quae lineam brevissimam in data superficie concernit, quippe quam describit punctum in superficie data moveri coactum et a viribus nullis acceleratricibus sollicitatum; unde habetur propositio:

aequationis differentialis secundi ordinis, a qua linea brevissima pendet, si integrale unum inventum est, lineae determinatio ad solas quadraturas revocatur.

Cuius propositionis exempla suggerunt lineae brevissimae in superficiebus rotundis, conicis, cylindricis, in quibus integrale unum sponte se offert. Ac generalius, quod diximus, valebit de aequationibus differentialibus secundi ordinis, a quibus pendent problemata, integralia huiusmodi

$$\int \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

maxima vel ***minima*** reddere. Facile autem patet e supra traditis, exhibendo problemata mechanica hic tractata sub forma

$$\delta \int (T+U)\, dt = 0,$$

methodum propositam omnibus problematibus isoperimetricis adhiberi posse, in quibus expressio sub signo integrationis quemlibet functionum incognitarum numerum earumque differentialia prima involvat. Posito enim $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$, si proponitur aequatio:

$$\delta \int \varphi(t, q_1, q_2, \dots q_m, q_1', q_2', \dots q_m')\, dt = 0,$$

ponatur

$$H = q_1' \frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} + \dots + q_m' \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi,$$

atque eliminentur ex hac expressione ipsae q_1', q_2', $\dots$ q_m' per aequationes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} = p_m.$$

Quo facto pendebit problema, quod facile e regulis notis calculi variationum comprobatur, atque ex ipsa analysi elucet, quam apud ill. *Hamilton* invenis, ab integratione completa systematis aequationum differentialium vulgarium sequentium:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Quam integrationem completam demonstravi obtineri per integrationem completam aequationis differentialis partialis

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

in qua ponendum est

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}.$$

Haec autem integratio per methodum novam hic propositam absolvitur.

Etiam generaliorem casum problematum isoperimetricorum, quo expressio sub signo integrationis praeter differentialia prima functionum incognitarum differentialia altiora ordinis cuiuslibet involvit, contingit ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocare. Quae aequationes differentiales partiales omnes eo commodo gaudent, quod functionem quaesitam sive variabilem dependentem ipsam non involvunt. Sunt tamen problemata isoperimetrica, quae ad aequationes differentiales partiales conducant ipsam etiam variabilem dependentem involventes, ea dico, in quibus expressio, cuius variationem evanescentem reddi oportet, non immediate ut integrale proponitur, sed et ipsa ab integratione aequationis differentialis primi ordinis pendet, quae praeterea functiones incognitas earumque differentialia involvit. Quin adeo, si expressio, cuius variationem evanescentem reddere proponitur, per aequationem differentialem cuiuslibet ordinis datur, quae etiam functiones incognitas earumque differentialia involvat, quaestionem ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocare contigit. Unde et illis quaestionibus valde generalibus methodos nostras applicare licet.

Quaestiones isoperimetricas, quae ad aequationes differentiales partiales primi ordinis revocari possunt, antecedentibus eas esse supposuimus, in quibus *functiones unius variabilis* seu *curvae* indagantur proprietati maximi minimive satisfacientes. Quaenam analoga extent circa problemata isoperimetrica, in quibus functiones duarum variabilium seu superficies quaeruntur, integrale duplex propositum maximum minimumve reddentes, felicioribus conatibus relinquo investiganda.

De relationibus simplicissimis, quibus differentialia partialia variabilium secundum elementa canonica sumta differentialibus elementorum secundum variabiles sumtis vel nude vel mutato signo singula singulis aequiparantur.

69.

Systema elementorum, quae afficiunt solutiones problematum mechanicorum secundum methodum a me propositam inventas, praeterea quod formulas perturbatorias simplicissimas suppeditant, aliis adhuc gravissimis proprietatibus gaudent. Quas sequentibus exponam.

Sit V functio quantitatum

$$q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$$

ac ponamus

$$(1.)\quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2.)\quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m,$$

$$(3.)\quad \frac{\partial V}{\partial t_1} = T_1, \quad \frac{\partial V}{\partial t_2} = T_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial t_\mu} = T_\mu.$$

Ex aequationibus (1.) et (2.) sint $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ expressae per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$ ac vice versa $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ expressae per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$. Quae sunt expressiones, quas in sequentibus subintelligam, si quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ secundum a_i, b_i, t_i vel vice versa quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ secundum q_i, p_i, t_i differentiantur. Suppositionem, quantitates q_i, p_i per a_i, b_i, t_i ita expressas esse, ut (1.), (2.) identicae evadant, vocabo *suppositionem primam;* suppositionem, quantitates a_i, b_i per q_i, p_i, t_i ita expressas esse, ut (1.), (2.) identicae evadant, vocabo *suppositionem secundam.*

Suppositione *prima* facta, differentiemus aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} = b_k$$

secundum a_i, b_i, t_i, prodit:

$$(4.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial a_i} = 0,$$

$$(5.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial b_i} = \frac{\partial b_k}{\partial b_i},$$

$$(6.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t_i} = 0.$$

Suppositione *secunda* facta differentiemus aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial q_\lambda} = p_\lambda$$

secundum $q_{i'}, p_{i'}, t_{i'}$, prodit:

$$(7.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = 0,$$

$$(8.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}},$$

$$(9.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = 0.$$

In his formulis indicibus i, i', k, λ tribui possunt valores $1, 2, \ldots m$, excepto ea quo i, i' ipsam t afficiunt, quo casu iis valores $1, 2, \ldots \mu$ conveniunt. Expressio $\frac{\partial b_k}{\partial b_i}$, $\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}}$ sunt aut $= 0$, si k, λ ab i, i' diversi sunt, aut $= 1$, si $k = i$, $\lambda =$

Multiplicentur aequationes (4.), (5.), (6.) per

$$\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial t_{i'}},$$

ac post multiplicationes factas instituatur summatio secundum indicem k, est, ponatur successive $1, 2, \ldots m$ loco ipsius k et expressiones, quae i prodeunt, addantur. Quo facto per (7.), (8.), (9.) nanciscimur e (4.):

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial a_i}, \end{cases}$$

$$(11.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial a_i}; \end{cases}$$

e (5.):

$$(13.)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i},$$

$$(14.)\quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15.)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i};$$

e (6.):

$$(16.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial t_i}, \end{cases}$$

$$(17.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial t_i}. \end{cases}$$

Si utrique parti aequationum (10.), (12.), (16.), (18.) respective additur:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial t_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial t_i}$$

aequationes inventae (10.) — (18.) sic exhiberi possunt:

$$(10.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(11.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(13.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(14.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = -\frac{\partial T_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(16.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(17.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial t_i}.$$

Ut aequationes novem praecedentes, quae sunt gravia et elegantia theoremata, recte intelligantur, teneri oportet, expressiones ad laevam omnes referri ad suppositionem secundam, qua considerantur $2m$ quantitates a_i et b_i ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$ aequationibus (1.) et (2.) identice satisfacientes atque illi ipsarum a_i et b_i valores in expressionibus T_i substituti supponuntur, antequam secundum $t_{i'}$ differentiantur; contra expressiones ad dextram omnes ad suppositionem primam pertinent, qua considerantur $2m$ quantitates q_i et p_i ut functiones ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$ aequationibus (1.) et (2.) identice satisfacientes, atque illi ipsarum q_i et p_i valores in expressionibus $T_{i'}$ substituti supponuntur, antequam secundum t_i differentiantur.

70.

Aequationes integrales systematis aequationum differentialium vulgarium propositi sub duabus maxime formis considerantur; exprimuntur enim aut incognitae omnes per unam ex earum numero (ex. gr. tempus in quaestionibus mechanicis) atque constantes arbitrarias, quas integratio completa secum fert, aut exprimuntur constantes arbitrariae per incognitas. Qua in re incognitas etiam dicimus earum differentialia, quae inferioris ordinis sunt atque summi, ad quem in aequationibus differentialibus propositis ascendunt. Aequationes posterioris formae ita comparatae sunt, ut semel differentiando constantes omnes arbitrariae sponte abeant, ideoque aequationibus differentialibus, quae inde provehiunt, per ipsas aequationes differentiales propositas sponte satisfiat, cuiusmodi aequationes integrales prae ceteris vocavi integralia aequationum differentialium propositarum. Aequationes integrales, quae motum ellipticum concernunt puncti secundum legem Neutonianam ad punctum fixum attracti, saepius sub utraque forma propositae sunt, variosque ad usus indagatae sunt quotientes differentiales partiales provenientes, si in altera forma incognitae secundum singulas constantes arbitrarias, sive in altera functiones constantibus arbitrariis aequivalentes secundum singulas incognitas differentiantur. Qua de re memoratu dignum mihi videtur, quod e formulis praecedentibus patet, proposito systemate aequationum differentialium vulgarium, quale in mechanicis integrandum est:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \cdots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \cdots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

si eligatur constantium arbitrarium sive elementorum systema canonicum, fore ut quotientes differentiales incognitarum secundum elementa aut elementorum secundum incognitas singulae singulis aequales evadant aut solo signo inter se differant.

Sit enim in formulis praecedentibus $\mu = 1$, sive una tantum adsit quantitatum $t_1, t_2, \ldots t_\mu$, quam vocabo t. Ponendo in expressione

$$\frac{\partial V}{\partial t} = T$$

loco $a_1, a_2, \ldots a_m$ earum valores per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t$ expressos, quales obtinetur ex m aequationibus

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

it T in $-H$, ideo ut sit $-H$ expressio ipsius T in suppositione secunda. e erit V integrale aequationis differentialis partialis

$$(1.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

d integrale continebit m constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_m$. Consideremus equationibus

$$(2.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \cdots & \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, & \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, & \cdots & \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m, \end{cases}$$

ibus sequebantur aequationes §^{i}. antec. (10.*) — (18.*), ipsas $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_2, \ldots b_m$ ut constantes, unde ex aequationibus illis fiunt $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_2, \ldots p_m$ solius t functiones. Ac scribendo $-H$ loco T_i in parte laeva iationum (16.*), (17.*) §^{i}. antec. obtinemus $2m$ aequationes differentiales, us aequationes (2.) satisfaciunt:

$$(3.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = \frac{dp_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{dq_{i'}}{dt},$$

us in formulis indici i' valores 1, 2, ... m tribuendi sunt. Aequationes) (10.*) — (15.*) suppeditant theorema propositum, videlicet: differentialia ialia variabilium secundum elementa differentialibus partialibus elementorum ndum variabiles singula singulis aequivalere. Casu, quo functio H ipsam n implicat, qui est frequentissimus in problematis mechanicis, ita agere licet. uamus, in §°. antec. functionem V quantitates $t_1, t_2, \ldots t_\mu$ omnino non icare; porro loco a_m scribamus h, loco b_m vero $t+\tau$. Unde aequationes , (2.) §^{i}. antec. fiunt:

$$(4.) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(5.) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau.$$

inatis e (4.) quantitatibus $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, prodeat

$$H = h,$$

inante H functionem ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, quae ipsam h implicat. Unde vice versa considerari potest V ut solutio completa ationis differentialis partialis:

$$H = h,$$

ua $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae (constantem arbitrariam,

quae functioni V sola additione iungi potest, ut plerumque, non respicimus) atque h constans data, quae ipsam iam aequationem differentialem afficit. Consideremus porro in aequationibus (4.), (5.) ipsas $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_m, \tau$ ut constantes, erunt per aequationes illas ipsae $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ datae functiones quantitatis t. Ponamus in aequationibus (13.*), (14.*) §^{i}. antec. $i = m$, atque, sicuti convenimus, loco a_m, b_m scribamus h atque $t+\tau$, in parte laeva aequationum illarum exprimendum erit a_m sive h per ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum (4.), (5.), sive loco a_m ponendum est H. Quo facto, si insuper animadvertimus, loco expressionum $\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m}$, $\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m}$ sive $\frac{\partial q_{i'}}{\partial (t+\tau)}$, $\frac{\partial p_{i'}}{\partial (t+\tau)}$ scribendum esse, si t ut variabilis independens spectetur,

$$\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m} = \frac{dq_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m} = \frac{dp_{i'}}{dt},$$

abeunt aequationes (13.*), (14.*) in systema aequationum differentialium vulgarium, quae aequationibus (4.), (5.) satisfaciunt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = -\frac{dp_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{dq_{i'}}{dt}.$$

Ac vice versa aequationibus (4.), (5.) hae aequationes differentiales complete integrantur. Porro aequationes §^{i} antec. (10.*), (11.*), (13.*), (14.*) suppeditant formulas:

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}, \qquad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}, \qquad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

in quibus indici i valores $1, 2, \ldots m-1$, indici i' valores $1, 2, \ldots m$ tribuendi sunt; atque fit:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial h}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial h},$$

in quibus aequationibus indici i' rursus valores $1, 2, \ldots m$ tribuendi sunt*).

---

*) Formulae eiusmodi, cum Academia Berolinensi scientiarum communicatae, iam inveniuntur in commentatiuncula „Neues Theorem der analytischen Mechanik", huius diarii tom. XXX, p. 117. C.

Formulae antecedentes applicantur in motum liberum n punctorum materialium quo aequatio conservationis virium vivarum locum habet.

71.

Operae pretium mihi videtur, nonnulla eorum, quae antecedentibus invenimus, pro casu systematis liberi per vires internas sollicitati seorsim theoremate exponere. Quo casu loco quantitatum q_i ponamus coordinatas orthogonales, unde loco ipsarum p_i ponendae erunt expressiones $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$.

Theorema.

Consideremus motum systematis liberi n punctorum materialium; sint x_i, y_i, z_i coordinatae orthogonales puncti, cuius massa m_i, ac sollicitentur singula puncta m_i secundum directiones axium coordinatarum viribus $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ talibus, ut evadat summa

$$\Sigma m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

extensa ad puncta omnia systematis, differentiale completum

$$dU = \Sigma m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

qui habetur casus, quoties systema punctorum materialium tantum viribus internis attractionis aut repulsionis sollicitatur. Ad inveniendum motum systematis, integretur aequatio differentialis partialis:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right\} = U + h,$$

in qua h est constans; inventaque solutione completa V, quae praeter constantem, quae sola additione ei iungi potest, constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}$ implicet, erunt aequationes finitae, quibus motus punctorum materialium definiuntur:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

designantibus $b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}, \tau$ novas constantes arbitrarias; porro erit

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n \frac{dx_n}{dt},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 \frac{dy_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n \frac{dy_n}{dt},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 \frac{dz_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 \frac{dz_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n \frac{dz_n}{dt}.$$

Per aequationes propositas, statuto

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

***considerari possunt** $6n$ **quantitates** x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' **ut functiones** $6n$ **quantitatum** $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}, t+\tau$, **vel vice versa spectari possunt** $6n$ **quantitates** $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}, t+\tau$, **ut functiones** $6n$ **quantitatum** $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$.*

***Si sub utraque suppositione functionum illarum quotientes differentiales partiales sumuntur, quotientes differentiales partiales sub altera suppositione sumtae quotientibus differentialibus partialibus sub altera suppositione sumtis singulae singulis aequales fiunt aut tantum signo differunt; fit enim, designante** i **unum quemcunque e numeris** $1, 2, \ldots n$, **atque** k **unum quemcunque e numeris** $1, 2, 3, \ldots 3n-1$:*

$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial x_i'}, \qquad m_i \frac{\partial x_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i'},$$

$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial y_i'}, \qquad m_i \frac{\partial y_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial y_i'},$$

$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial z_i'}, \qquad m_i \frac{\partial z_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial z_i'},$$

$$m_i \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{\partial y_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{\partial z_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial z_i}, \qquad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial z_i},$$

$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i'}, \qquad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i'}, \qquad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i'}, \qquad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i}.$$

***Statuamus propositos motus perturbari, viribus** $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ **punctum** m_i **sollicitantibus accedentibus novis viribus** $m_i X_i'$, $m_i Y_i'$, $m_i Z_i'$, **designantibus** X_i', Y_i', Z_i' **functiones omnium** $3n$ **coordinatarum** x_i, y_i, z_i **atque temporis** t,*

ac sit, si solae coordinatae variantur neque simul tempus, summa

$$\Sigma m_i \{X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i\},$$

extensa ad puncta omnia systematis, variatio completa

$$-\delta\Omega = \Sigma m_i \{X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i\};$$

quibus statutis, aequationes problematis imperturbati

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 x_1', \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 x_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n x_n',$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 y_1', \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 y_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n y_n',$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 z_1', \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 z_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n z_n'$$

etiam motus suppeditabunt perturbatos, si loco elementorum $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}$, h, $b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}$, τ *sumuntur functiones temporis satisfacientes aequationibus differentialibus:*

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \cdots \quad \frac{da_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{3n-1}},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \cdots \quad \frac{db_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{3n-1}},$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

quibus in aequationibus supponitur, functionem Ω *ope aequationum pro motu imperturbato inventarum*

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

per sola elementa et tempus expressam esse.

Aequatio differentialis partialis in theoremate antecedente proposita invenitur ex aequatione

$$H = T - U = h,$$

quum sit T semissis summae virium vivarum

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \{x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i'\};$$

aequationes vero

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

in aequatione $H = h$ substituendae, quo aequatio differentialis partialis evadat,

hic sunt

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Unde aequatio

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U = h,$$

abit in aequationem

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} - U = h,$$

quae est aequatio differentialis partialis in theoremate antecedente proposita. Formulae perturbatoriae theorematis e §. 52. petitae sunt, scriptis h et τ loco a et b. Eaedem expressiones differentialium elementorum habentur etiam pro generalioribus aequationibus differentialibus, in quibus Ω praeter ipsas x_i, y_i, z_i etiam quantitates x_i', y_i', z_i' involvere potest:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' + \frac{\partial\Omega}{\partial x_i'}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i' + \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i' + \frac{\partial\Omega}{\partial z_i'},$$

$$m_i\frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial x_i}, \qquad m_i\frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial y_i}, \qquad m_i\frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial z_i},$$

quae, quoties Ω ipsas non implicat x_i', y_i', z_i' in aequationes differentiales perturbatas, quae vulgo habentur, redeunt:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial x_i}, \qquad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial y_i}, \qquad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial(U-\Omega)}{\partial z_i}.$$

Si theorema antecedens ad motum ellipticum planetarum applicare placet, ponamus, uti in formulis §. 67 factum est,

$$h = -\frac{\varkappa^2}{2A}, \qquad a_1 = \varkappa\sqrt{p}\cos i, \qquad a_2 = \varkappa\sqrt{p},$$

$$b = \tau, \qquad b_1 = \Omega, \qquad \frac{\pi}{2} + b_2 = \varpi,$$

designantibus A, p, i, $-\tau$, Ω, ϖ semiaxem maiorem, parametrum, inclinationem, tempus perihelii, longitudinem nodi ascendentis, distantiam perihelii a nodo ascendente, atque $\varkappa^2$ vim attractivam pro unitate distantiae. Si x, y, z, x', y', z' per A, p, $\sqrt{p}\cos i$, τ, Ω, ϖ, t vel vice versa A, p, i, τ, Ω, ϖ per x, y, z, x', y', z' exprimimus, et expressiones illas sub utraque suppositione differentiamus, prodeunt e theoremate antecedente formulae:

$$\frac{\partial x}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-x\frac{\partial\Omega}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-x\frac{\partial\Omega}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-x\frac{\partial\Omega}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\Omega}=x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\Omega}=x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\Omega}=x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\sqrt{p}}=-x\frac{\partial\varpi}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\sqrt{p}}=-x\frac{\partial\varpi}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\sqrt{p}}=-x\frac{\partial\varpi}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varpi}=x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\varpi}=x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\varpi}=x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial z'},$$

$$2A^2\frac{\partial x}{\partial A}=-x^2\frac{\partial\tau}{\partial x'},\quad 2A^2\frac{\partial y}{\partial A}=-x^2\frac{\partial\tau}{\partial y'},\quad 2A^2\frac{\partial z}{\partial A}=-x^2\frac{\partial\tau}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=x\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=x\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=x\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\Omega}=-x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\Omega}=-x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\Omega}=-x\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\sqrt{p}}=x\frac{\partial\varpi}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\sqrt{p}}=x\frac{\partial\varpi}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\sqrt{p}}=x\frac{\partial\varpi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\varpi}=-x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\varpi}=-x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\varpi}=-x\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial z},$$

$$2A^2\frac{\partial x'}{\partial A}=x^2\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad 2A^2\frac{\partial y'}{\partial A}=x^2\frac{\partial\tau}{\partial y},\quad 2A^2\frac{\partial z'}{\partial A}=x^2\frac{\partial\tau}{\partial z}.$$

Quibus in formulis designat i inclinationem plani orbitae ad unum planorum coordinatarum orthogonalium x, y, z, atque Ω angulum, quem intersectio utriusque plani cum altera axi coordinatarum facit, quae in plano illo coordinatarum ducta est. E formulis notis motus elliptici verificationem formularum praecedentium facile obtinere licet. Quae facile etiam in alias varias formas transfunduntur.

. . . .

De expressionibus (φ, ψ) et $[\varphi, \psi]$, quae in modum coefficientium in ill. Lagrange et Poisson formulis perturbatoriis obvenientium conflatae sunt. Innotescente integrali quolibet $H_i = a_i$ aequationum dynamicarum, differentialia omnia functionis cuiuslibet secundum elementum b_i, quod ipsi a_i in systemate quolibet elementorum canonico fiat coniugatum, assignari possunt.

72.

Statuamus rursus:

$$[\varphi,\psi]=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}.$$

porro, uncis rotundis adhibitis,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial q_1}{\partial \psi}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_2}{\partial \psi}\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \psi}\frac{\partial p_m}{\partial \varphi}$$
$$- \frac{\partial q_1}{\partial \varphi}\frac{\partial p_1}{\partial \psi} - \frac{\partial q_2}{\partial \varphi}\frac{\partial p_2}{\partial \psi} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \varphi}\frac{\partial p_m}{\partial \psi}$$

facile probatur e formulis §. 69 traditis, haberi

$$(1.) \quad [a_i, a_k] = 0, \quad [a_i, b_k] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0,$$
$$(2.) \quad (a_i, a_k) = 0, \quad (a_i, b_k) = 0, \quad (b_i, b_k) = 0,$$

exceptis aequationibus:

$$(3.) \quad [a_i, b_i] = -1, \qquad (4.) \quad (a_i, b_i) = 1.$$

Formulae (1.) ad suppositionem secundam pertinent, qua consideravimus ipsas a_i, b_i ut functiones ipsarum q_i, p_i, t_i; formulae (2.) ad suppositionem primam, qua considerantur q_i, p_i ut functiones ipsarum a_i, b_i, t_i. Quae formulae e (10.*) seqq. §. 69 sic demonstrantur:

Habetur, extensa summatione ad ipsius i' valores 1, 2, ... m:

$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial a_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial b_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial b_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\},$$

exceptis casibus, quibus in aequatione prima et quarta fit $k = i$, quibus casibus habetur:

$$1 = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$1 = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\}.$$

Substituamus in formulis praecedentibus aequationes (10.*), (11.*), (13.*), (14.*) §. 69

$$\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} = \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} = -\frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}},$$

abeunt illae in sequentes:

$$-[a_k, b_i] = 0, \quad [a_k, a_i] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0, \quad -[a_i, b_k] = 0,$$
$$1 = -[a_i, b_i] = [b_i, a_i],$$

quae conveniunt cum aequationibus demonstrandis (1.), (3.).

Porro in iisdem formulis easdem substituamus aequationes (10.*) — (14.*) §. 69, in quibus tamen loco indicis i scribamus k, unde evadunt:

$$\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}.$$

Quibus substitutis, aequationes supra traditae in sequentes abeunt:

$$0 = (a_i, b_k), \quad 0 = (b_i, b_k), \quad 0 = (a_k, a_i), \quad 0 = (a_k, b_i)$$
$$1 = (a_i, b_i),$$

quae sunt aequationes demonstrandae (2.), (4.).

Sint φ, ψ datae quaecunque functiones ipsarum a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m, quae quantitates t_1, t_2, ... t_μ non contineant. Substitutis ipsarum a_i, b_i, valoribus per q_i, p_i, t_i expressis, evadant φ, ψ harum quantitatum functiones, eritque

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_{i'} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \right\} =$$

$$\Sigma_{i'} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} \right) \Sigma_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} \right) \\ -\Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} \right) \Sigma_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} \right) \end{array} \right\}.$$

Quae expressio sic repraesentari potest:

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [a_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [a_i, b_k] \right\}$$
$$+ \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [b_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [b_i, b_k] \right\},$$

unde e (1.), (3.) habetur:

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_i} \right\},$$

sive

(5.)
$$\left\{ \begin{array}{l} [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \qquad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \\ \qquad = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} \frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial b_m} \frac{\partial \psi}{\partial a_m} \\ \qquad - \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \frac{\partial \psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} \frac{\partial \psi}{\partial b_m}. \end{array} \right.$$

Quoties igitur accidit, ut φ, ψ sint eiusmodi ipsarum q_i, p_i, t_i functiones, quae per solas a_i, b_i absque quantitatibus t_i exprimi queant, erit etiam

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}$$

eiusmodi functio, quippe quae aequalis fit expressioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}\frac{\partial\psi}{\partial a_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial b_m}\frac{\partial\psi}{\partial a_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial\psi}{\partial b_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\frac{\partial\psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}\frac{\partial\psi}{\partial b_m},$$

quae, si φ et ψ sint solarum a_i, b_i functiones ab ipsis t_i vacuae, et ipsa erit solarum a_i, b_i functio ab ipsis t_i libera. Si quantitatum t_i una tantum in problemate proposito adest, quam t vocemus, redit propositio antecedens in eam, quam olim ill. *Poisson* demonstravit, quoties $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ sint integralia systematis aequationum differentialium

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ *),$$

quantitatem $[\varphi, \psi]$ per sola elementa absque t exprimi.

Casus specialis aequationis (5.) valde memorabilis is est, quo functio ψ uni quantitatum a_i, b_i aequalis existit; tum enim abit aequatio illa in has simplices:

$$(6.) \quad \begin{cases} [\varphi, a_i] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial b_i}, \\ [\varphi, b_i] = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_i}. \end{cases}$$

Docent hae aequationes sequentia: *Quoties enim habetur aequationum differentialium propositarum integrale*

$$\varphi = \text{Const.},$$

φ per ipsas a_i, b_i absque t exprimi potest, quam vero expressionem ipsam

*) Aequationes differentiales ill. *Poisson* sub alia forma exhibuit; licet enim iam ille animadverterit in commentatione prima de Variatione Constantium, expressiones ipsis $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dq_k}{dt}$ aequales per q_i, p_i exhibitas ita comparatas esse, ut prioris differentiale secundum p_k alterius differentiali secundum p_i aequale sit; expressionem simplicem ipsius $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, unde illud sponte sequitur, primus ill. *Hamilton* dedit.

generaliter exhibere non possumus, nisi omnium a_i, b_i expressiones per q_i, p_i, t datae sint. At si vel unius novimus elementi, quod ad systema elementorum canonicum pertinet, expressionem per q_i, p_i, t, directe invenire licet differentialia ipsius φ secundum elementum coniugatum sumta et ipsa per q_i, p_i, t expressa, siquidem bina a_i et b_i elementa coniugata dicimus. Nam si elementum canonicum datum est a_i, habetur e (6.):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = [\varphi, a_i],$$

unde ponendo $\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}$, etc. loco φ, prodit:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, a_i\right], \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial b_i^3} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}, a_i\right], \qquad \text{etc.}$$

unde successive omnium $\frac{\partial^n \varphi}{\partial b_i^n}$ innotescunt valores per q_i, p_i, t expressi. Si tantum unum habetur integrale, $\psi = a_i$, poterit constans ipsi ψ aequalis pro elemento canonico accipi; excipias tamen casum, quo $\psi = H$, quod fieri potest, si H ipsam t non involvit, quippe quo casu, quoties $\varphi =$ Const. est integrale alterum, habetur $[\varphi, a_i] = 0$ neque aliquid novi inde prodit.

Ad illustrandas aequationes (6.), quae magnas partes agere debent in ulterioribus et altioribus disquisitionibus, quas integrationes propositae flagitant, ut omnia quae hic adhuc latent, enucleentur, directe eas de aequationibus §. 69 propositis deducam. Quod fit per considerationes sequentes. Sit enim a_i data functio ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t$, ac consideremus ipsam t, siquidem t in functione a_i invenitur, ut constantem datam atque omnes $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ praeter unam b_i ut constantes arbitrarias, erunt $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ functiones ipsius b_i, quae satisfaciunt aequationibus differentialibus (13.*), (14.*) §. 69:

$$\frac{dq_1}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_m},$$

quae plane eandem formam habent atque aequationes differentiales propositae, modo functio a_i functionis H atque variabilis b_i variabilis t locum tenet. Per regulas autem vulgares differentiationis ex aequationibus praecedentibus cuiuslibet functionis ipsarum $q_{i'}$, $p_{i'}$ differentialia prima, secunda, tertia etc. successive eruuntur, continuo differentialium $\frac{dq_{i'}}{db_i}$, $\frac{dp_{i'}}{db_i}$ valores substituendo;

quemadmodum tritum est, ex systemate aequationum differentialium

$$\frac{dq_{i'}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{dp_{i'}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}}$$

cuiuslibet functionis differentialia cuiuslibet ordinis per ipsas $q_{i'}$, $p_{i'}$, t, expressa inveniri posse. Si ex. gr. functionis φ differentiale primum secundum b_i quaeris, eruis:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{db_i} &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{db_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{dq_m}{db_i} \\ &\quad + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{db_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{dp_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{dp_m}{db_i} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial a_i}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial a_i}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial a_i}{\partial p_m} \\ &\quad - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial a_i}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial a_i}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial a_i}{\partial q_m} \\ &= [\varphi, a_i],\end{aligned}$$

quae est altera aequationum (6.); eademque methodo demonstratur altera.

Observo adhuc, in formulis §. 69 et antecedentibus, quae ex iis derivata sunt, ubique a, b atque q, p inter se permutari posse.

Ipsis a_i, b_i per alias quantitates α, β, γ etc. expressis, quaeramus adhuc valorem expressionis:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial q_1}{\partial\beta}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial\beta}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial\beta}\frac{\partial p_m}{\partial\alpha} \\ &\quad - \frac{\partial q_1}{\partial\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial\beta} - \frac{\partial q_2}{\partial\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial\beta} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\frac{\partial p_m}{\partial\beta}.\end{aligned}$$

Fit $(\alpha, \beta) =$

$$\begin{aligned}&\Sigma\left\{\left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\beta} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right)\right\} \\ -&\Sigma\left\{\left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\beta} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\right)\right\},\end{aligned}$$

indicibus i', i, k tributis valoribus 1, 2, ... m. Evolutis productis ex aequatione praecedente eruimus $(\alpha, \beta) =$

$$\Sigma\left\{(a_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial\beta}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + (b_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial\beta}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha} + (a_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + (b_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right\},$$

indicibus i et k sub signo summatorio tributis valoribus 1, 2, ... n. Sed e formulis (2.) evanescunt sub signo summatorio termini omnes,

pro quibus k et i inter se diversi sunt; unde quum e (4.) sit

$$(a_i, b_i) = 1,$$

atque sponte pateat fieri

$$(a_i, a_i) = 0, \quad (b_i, b_i) = 0,$$

sequitur

$$(\alpha, \beta) = \Sigma \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} \frac{\partial b_i}{\partial \beta} - \frac{\partial a_i}{\partial \beta} \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} \right\},$$

sive

$$(7.) \quad \begin{cases} (\alpha, \beta) = \frac{\partial q_1}{\partial \beta} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial \beta} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \beta} \frac{\partial p_m}{\partial \alpha} \\ \qquad - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} \frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \alpha} \frac{\partial p_m}{\partial \beta} \\ \qquad = \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} \frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \frac{\partial a_2}{\partial \alpha} \frac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial a_m}{\partial \alpha} \frac{\partial b_m}{\partial \beta} \\ \qquad - \frac{\partial a_1}{\partial \beta} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta} \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} - \cdots - \frac{\partial a_m}{\partial \beta} \frac{\partial b_m}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Statuamus, ipsam β ex elementis canonicis esse sive haberi $\beta = a_i$ aut $\beta = b_i$, atque reliquorum elementorum expressiones hoc elementum non continere. Quo casu formula antecedens abit in sequentes simplices:

$$(8.) \quad \begin{cases} (\alpha, a_i) = -\frac{\partial b_i}{\partial \alpha}, \\ (\alpha, b_i) = \frac{\partial a_i}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Quibus adnotatis pauca de formulis generalibus perturbatoriis addam, quae de systemate elementorum quocunque valent.

Formularum perturbatoriarum systemata quae ill. Lagrange et Poisson posuerunt, demonstrantur et alterum ex altero derivantur.

73.

Loco ipsorum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ habeatur systema elementorum quodcunque, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$. Quorum respectu formulas perturbatorias sub duabus maxime formis proponere convenit. In altera, quae ill^i *Lagrange* est, differentialia partialia functionis perturbatricis Ω secundum elementa sumta lineariter exprimuntur per differentialia elementorum; in altera, quae ill^i *Poisson* est, differentialia elementorum perturbatorum lineariter exprimuntur per differentialia partialia functionis perturbatricis Ω secundum elementa sumta. In altera forma expressionum linearium coefficientes sunt

functiones (α_i, α_k), in altera functiones $[\alpha_i, \alpha_k]$. Plerumque adnotari solet, alteram formam ex altera per solam resolutionem aequationum $2m$ linearium obtineri posse. Sed nemo, quantum scio, hanc resolutionem reapse tentavit eaque via directa alteram formam de altera derivavit. Quod quum utile sit et difficultatis speciem quandam habeat, ego sequentibus exponam; antea autem formulas perturbatorias generales de formulis supra traditis deducam, licet eaedem directe ex ipsis aequationibus differentialibus peti possint, sicuti plerumque fit.

Spectentur *primum* elementa canonica $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ ut functiones aliorum elementorum quorumcunque $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$; erit e §. 52:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n} &= \Sigma_i \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n}+\frac{\partial\Omega}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n}\right\}\\ &= \Sigma_i \left\{\frac{db_i}{dt}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n}-\frac{da_i}{dt}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n}\right\}\\ &= \Sigma_{i,k}\left\{\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_k}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n}-\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_k}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n}\right\}\frac{d\alpha_k}{dt},\end{aligned}$$

quibus in summis ipsi i valores $1, 2, \ldots m$, ipsi k valores $1, 2, \ldots 2m$ tribuendi sunt. Unde e (7.) §. antec. fit

$$(1.)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n} = \Sigma_k(\alpha_n, \alpha_k)\dfrac{d\alpha_k}{dt}\\ \qquad = (\alpha_n, \alpha_1)\dfrac{d\alpha_1}{dt}+(\alpha_n, \alpha_2)\dfrac{d\alpha_2}{dt}+\cdots+(\alpha_n, \alpha_{2m})\dfrac{d\alpha_{2m}}{dt}.\end{cases}$$

Spectentur *deinde* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ ut functiones ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$: habetur e §. 52:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_n}{dt} &= \Sigma_i \left\{\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{da_i}{dt}+\frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}\right\}\\ &= \Sigma_i \left\{-\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial\Omega}{\partial b_i}+\frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\right\}\\ &= \Sigma_{i,k}\left\{-\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial\alpha_k}{\partial b_i}+\frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_i}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k},\end{aligned}$$

quibus in summis ipsi i rursus valores $1, 2, \ldots m$, ipsi k valores $1, 2, \ldots 2m$ tribuendi sunt. Unde e (5.) §. antec. scribendo α_n, α_k loco φ, ψ prodit:

$$(2.)\quad \begin{cases}\dfrac{d\alpha_n}{dt} = \Sigma_k[\alpha_n, \alpha_k]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k}\\ \qquad = [\alpha_n, \alpha_1]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+[\alpha_n, \alpha_2]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\cdots+[\alpha_n, \alpha_{2m}]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_{2m}}.\end{cases}$$

Formulae (1.) ab ill. *Lagrange,* formulae (2.) ab ill. *Poisson* traditae sunt. Aliae de aliis derivari possunt ope theorematis sequentis:

Theorema:

Sint $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ *functiones quaecunque a se invicem independentes quantitatum* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$, *ita ut invicem spectari possint* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ *ut functiones a se invicem independentes quantitatum* $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; *statuatur in suppositione priori:*

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_k},$$

in suppositione posteriori:

$$[\alpha_i, \alpha_k] = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_1} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_m};$$

quibus statutis significationibus, si proponuntur $2m$ *aequationes lineares sequentes:*

$$\begin{aligned}
v_1 &= \quad * \quad + (\alpha_1, \alpha_2)u_2 + (\alpha_1, \alpha_3)u_3 + \cdots + (\alpha_1, \alpha_{2m})u_{2m},\\
v_2 &= (\alpha_2, \alpha_1)u_1 + \quad * \quad + (\alpha_2, \alpha_3)u_3 + \cdots + (\alpha_2, \alpha_{2m})u_{2m},\\
v_3 &= (\alpha_3, \alpha_1)u_1 + (\alpha_3, \alpha_2)u_2 + \quad * \quad + \cdots + (\alpha_3, \alpha_{2m})u_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_{2m} &= (\alpha_{2m}, \alpha_1)u_1 + (\alpha_{2m}, \alpha_2)u_2 + (\alpha_{2m}, \alpha_3)u_3 + \cdots + \quad * \quad ,
\end{aligned}$$

eruuntur resolutione harum aequationum valores ipsarum $u_1, u_2, \ldots u_{2m}$ *sequentes:*

$$\begin{aligned}
u_1 &= \quad * \quad + [\alpha_1, \alpha_2]v_2 + [\alpha_1, \alpha_3]v_3 + \cdots + [\alpha_1, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
u_2 &= [\alpha_2, \alpha_1]v_1 + \quad * \quad + [\alpha_2, \alpha_3]v_3 + \cdots + [\alpha_2, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
u_3 &= [\alpha_3, \alpha_1]v_1 + [\alpha_3, \alpha_2]v_2 + \quad * \quad + \cdots + [\alpha_3, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{2m} &= [\alpha_{2m}, \alpha_1]v_1 + [\alpha_{2m}, \alpha_2]v_2 + [\alpha_{2m}, \alpha_3]v_3 + \cdots + \quad * \quad
\end{aligned}$$

et vice versa harum aequationum resolutione illae obtinentur.

Demonstratio:

Multiplicemus aequationes propositas per

$$[\alpha_i, \alpha_1], \quad [\alpha_i, \alpha_2], \quad \ldots \quad [\alpha_i, \alpha_{2m}]$$

et productorum summationem instituamus. Unde prodibit expressio huiusmodi

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} = A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_{2m}u_{2m},$$

in qua:

$$\begin{aligned} A_k &= [\alpha_i, \alpha_1](\alpha_1, \alpha_k) + [\alpha_i, \alpha_2](\alpha_2, \alpha_k) + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}](\alpha_{2m}, \alpha_k) \\ &= \Sigma_n [\alpha_i, \alpha_n](\alpha_n, \alpha_k) \\ &= \Sigma_n \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_m} \\ -\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_m} \end{array} \right\} \times \\ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_n} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_n} + \cdots + \dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_n} \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_n} - \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_n} - \cdots - \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_n} \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

qua in summa ipsi n valores $1, 2, \ldots 2m$ tribuendi sunt. Eandem expressionem facta multiplicatione sic repraesentare licet:

$$\begin{aligned} A_k = {} & \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right\} \\ & + \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right\} \\ & - \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right\} \\ & - \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right\}, \end{aligned}$$

quibus in summis ipsi n valores $1, 2, \ldots 2m$, ipsis i', k' valores $1, 2, \ldots m$ tribuendi sunt. Iam vero habetur:

$$\Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial p_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial q_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial p_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial q_{i'}},$$

quarum expressionum tertia et quarta semper evanescunt, prima et secunda evanescunt, si i' et k' inter se diversi sunt, in unitatem abeunt, si $i' = k'$. Unde fit:

$$A_k = \Sigma_{i'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial \alpha_k} \right\} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k}.$$

Quae expressio quum evanescat nisi sit $i = k$, hoc autem casu in unitatem abeat, videmus, in parte posteriore aequationis:

$$[\alpha_i, \alpha_1] v_1 + [\alpha_i, \alpha_2] v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}] v_{2m} = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_{2m} u_{2m}$$

coefficientes A_1, A_2, ... A_{2m} praeter unum A_i evanescere omnes, fieri autem $A_i = 1$. Unde aequatio antecedens haec evadit:

$$[\alpha_i, \alpha_1] v_1 + [\alpha_i, \alpha_2] v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}] v_{2m} = u_i,$$

in qua, si ipsi i successive valores 1, 2, ... $2m$ tribuuntur, eruuntur ipsarum u_1, u_2, ... u_{2m} valores in theoremate proposito assignati.

Prorsus simili methodo vice versa e secundo systemate aequationum in theoremate antecedente propositarum systema primum derivari potest.

11.

De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque.

(Ex ill. *C. G. J. Jacobi* manuscriptis posthumis in medium protulit*) *C. W. Borchardt.*)

1.

Investigatio ad solvendum problema inaequalitatum reducitur.

Systema aequationum differentialium vulgarium est ***non canonicum*****), si aequationes altissima variabilium dependentium differentialia tali modo continent, ut horum valores ex iis petere non liceat. Id quod fit, quoties aequationes nonnullae altissimis illis differentialibus carentes in systemate proposito vel ipsae inveniuntur vel eliminatione ex eo obtinentur. ***Eo casu numerus Constantium Arbitrariarum, quas integratio completa inducit, sive ordo systematis semper minor est summa altissimorum ordinum, ad quos differentialia singularum variabilium in aequationibus differentialibus propositis ascendunt.*** Qui ordo systematis cognoscitur, si per differentiationes et eliminationes contingit systema propositum redigere in aliud forma canonica gaudens eique aequivalens, ita ut de systemate canonico etiam ad propositum reditus pateat. Nam summa altissimorum ordinum, ad quos in systemate canonico differentialia singularum variabilium dependentium ascendunt, etiam systematis propositi non canonici ordo erit. Ad quem ordinem investigandum non tamen opus est ea ad formam canonicam reductione, sed res per considerationes sequentes absolvi potest.

Ponamus inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \ldots x_n$ haberi n aequationes differentiales:

$$(1.) \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascen-

*) Huic ill. *Jacobi* commentationi jam *S. Cohn* operam dederat, sed praematura morte abreptus manuscriptum non reliquit prelo paratum.

**) Systema quod hic canonicum seu forma canonica gaudens appellatur idem est quod in „theoria novi multiplicatoris“ forma normali praeditum vocatur (diarii Crelliani tom. 29, p. 369 sive *Jacobi* opuscula math. I., p. 219), sed plane differt ab eo, cui *Jacobi* in „nova methodo aequat. diff. partiales primi ordinis integrandi“ (diarii mathematici tom. 60, p. 121) nomen canonici tribuit.

dunt. Ac primum observo, quaestionem revocari posse ad casum simpliciorem, quo aequationes differentiales propositae sunt lineares. Etenim variando aequationes (1.), inter variationes

$$(2.) \qquad \delta x_1 = \xi_1, \quad \delta x_2 = \xi_2, \quad \ldots \quad \delta x_n = \xi_n$$

obtinemus systema aequationum differentialium *linearium*

$$(3.) \qquad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \ldots \quad v_n = 0,$$

eritque rursus $h_k^{(i)}$ altissimus ordo, ad quem differentialia ipsius $\xi_k = \delta x_k$ in aequatione $v_i = \delta u_i = 0$ ascendunt. Quarum aequationum differentialium linearium (3.) datur integratio completa, si pro valoribus $k = 1, 2, \ldots n$ ponitur

$$(4.) \qquad \xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \cdots,$$

ubi per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ illas Constantes Arbitrarias designamus, quas valores completi variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ integratione aequationum (1.) eruti involvunt, per $\beta_1, \beta_2, \ldots$ vero eas Constantes Arbitrarias, quas integratio systematis (3.) inducit. Unde idem fit numerus Constantium Arbitrariarum in integratione completa aequationum differentialium propositarum (1.) atque linearium (3.), sive utriusque systematis idem ordo est.

In explorando ordine systematis aequationum differentialium linearium (3.) supponere licet Coefficientes esse Constantes. Eo autem casu integratio completa methodo nota obtinetur, nulla ad formam canonicam reductione facta. Designemus per symbolum

$$(\xi)_m$$

expressionem

$$A_0 \xi + A_1 \frac{d\xi}{dt} + A_2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \cdots + A_m \frac{d^m \xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

in qua $A_0, A_1, A_2, \ldots A_m$ sunt Constantes, gaudebunt aequationes (3.), si Coefficientes earum constantes ponimus, hac forma

$$(5.) \qquad \begin{cases} v_1 = (\xi_1)_{h_1'} + (\xi_2)_{h_2'} + \cdots + (\xi_n)_{h_n'} = 0, \\ v_2 = (\xi_1)_{h_1''} + (\xi_2)_{h_2''} + \cdots + (\xi_n)_{h_n''} = 0, \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ v_n = (\xi_1)_{h_1^{(n)}} + (\xi_2)_{h_2^{(n)}} + \cdots + (\xi_n)_{h_n^{(n)}} = 0. \end{cases}$$

Pono in his aequationibus

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t}$$

designantibus C_k et λ Constantes, obtinetur *e* (5.):

$$(6.)\quad \begin{cases} 0 = C_1[\lambda]_{h_1'} + C_2[\lambda]_{h_2'} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n'}, \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1''} + C_2[\lambda]_{h_2''} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n''}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1^{(n)}} + C_2[\lambda]_{h_2^{(n)}} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n^{(n)}}, \end{cases}$$

siquidem per

$$[\lambda]_m$$

functio quantitatis λ integra ordinis m^{ti} designatur.

Eliminatis $C_1, C_2, \ldots C_n$, prodit aequatio algebraica, cujus radices suggerunt valores, quos λ induere potest, et cuique radici sive valori ipsius λ respondet systema valorum ipsarum $C_1, C_2, \ldots C_n$, quos omnes per eandem Constantem Arbitrariam multiplicare licet. Jungendo cujusque variabilis ξ_k valores singulis radicibus respondentes, prodit ejus valor completus, et cum singularum variabilium valores sic provenientes iisdem Constantibus Arbitrariis afficiantur, aequationum (5.) integratio completa tot inducit Constantes Arbitrarias, quot sunt ipsius λ valores. Unde ordo systematis aequationum differentialium linearium (3.) vel etiam ipsarum aequationum differentialium propositarum (1.) aequatur gradui aequationis algebraicae, qua λ definitur. Quam aequationem repraesentare licet hoc modo

$$(7.)\quad 0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h_1'}[\lambda]_{h_2''} \ldots [\lambda]_{h_n^{(n)}},$$

eritque gradus Determinantis ad dextram aequalis *maximo* ex $1.2.3 \ldots s$ aggregatis, quae e sequente

$$h_1' + h_2'' + \cdots + h_n^{(n)}$$

proveniunt, indices inferiores aut superiores omnimodis permutando. Unde jam nacti sumus hanc Propositionem memorabilem:

Propositio I. *Inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *habeantur n aequationes differentiales*

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ *differentialia variabilis* x_k *ascen-*

dunt. Jam si vocatur

$$H$$

maximum e $1.2.3 \ldots n$ *aggregatis*

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)},$$

quae obtinentur sumendo pro indicibus

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots \quad i_n$$

quoscunque inter se diversos ex indicibus $1, 2, \ldots n$*; erit H ordo systematis aequationum differentialium propositarum sive numerus Constantium Arbitrariarum, quas earum integratio completa inducit.*

Maximum in antecedentibus voco valorem nullo alio aggregati propositi minorem, ita ut plura maxima locum habere possint inter se aequalia, diversis indicum $i_1, i_2, \ldots i_n$ systematis respondentia.

Gradus aequationis algebraicae (7.) non minuitur, nisi in Determinante ad dextram posito Coefficiens altissimae quantitatis λ potestatis evanescit. Obtinetur autem altissimae ipsius λ potestatis Coefficiens, si in formando Determinante cuique functioni integrae rationali $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$ substituimus Coefficientem altissimae seu $h_k^{(i)\,\text{tae}}$ ipsius λ potestatis, quem designabo per

$$[c]_{h_k^{(i)}},$$

atque ex omnibus Determinantis terminis

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \cdots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

eos tantum servamus, in quibus summa indicum

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}$$

valorem maximum H obtinet. Quare nunquam locum habet reductio gradus, nisi pro duobus pluribusve indicum $i_1, i_2, \ldots i_n$ systematis aggregatum antecedens eundem valorem maximum induit atque summa productorum

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \cdots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

illis indicum systematis respondentium suisque signis sumtorum evanescit. Aequabatur autem in antecedentibus $[c]_{h_k^{(i)}}$ Coefficienti termini $\delta \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}$ e variatione functionis u_i provenientis, sive positum erat

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}}$$

Quod si tenemus, haec emergit altera Propositio antecedentis supplementaria.

Propositio II. *Vocetur*

$$u_k^{(i)}$$

differentiale partiale ipsius u_i sumtum secundum variabilis x_k altissimum quod functio u_i involvit differentiale (i. e. ordinis $h_k^{(i)}$). Ex omnibus terminis Determinantis

$$\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}$$

ii soli retineantur $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \dots u_n^{(i_n)}$, in quibus summa ordinum differentialium singularum variabilium, secundum quae in singulis

$$u_1^{(i_1)}, \quad u_2^{(i_2)}, \quad \dots \quad u_n^{(i_n)}$$

differentiatio partialis facta est, valorem maximum H obtinet. Jam si aggregatum terminorum Determinantis remanentium designatur Determinantis signum uncis includendo hoc modo

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}),$$

ordo systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_n = 0$$

tum demum valore illo maximo H inferior erit, si habetur

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}) = 0,$$

quae ubi locum non habet aequatio, ordo systematis semper valori maximo H aequatur.

Nacti sumus antecedentibus novum genus formularum, Determinantia *mancа*

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}).$$

Cujusmodi quantitas evanescens indicio est, ordinem systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_n = 0$$

per indolem illarum aequationum peculiarem diminutionem pati.

Explorato ordine systematis aequationum differentialium quarumcunque, via sternitur ad inveniendam methodum, qua ipsa reductio earum in formam canonicam praestari possit. Sed in hac commentatione sufficiat, in naturam maximi, de quo agitur, et quomodo commode inveniatur, accurate inquirere.

2.

De solutione problematis inaequalitatum, quo investigatio ordinis systematis aequationum differentialium quarumcunque innititur. Proposito schemate definitur Canon. Dato Canone quocunque invenitur simplicissimus.

Antecedentibus investigatio ordinis systematis aequationum differentialium vulgarium revocata est ad sequens problema inaequalitatum etiam per se tractatu dignum:

Problema.

Disponantur nn quantitates $h_k^{(i)}$ ***quaecunque in schema Quadrati, ita ut habeantur n series horizontales et n series verticales quarum quaeque est n terminorum. Ex illis quantitatibus eligantur n transversales i. e. in seriebus horizontalibus simul atque verticalibus diversis positae, quod fieri potest*** $1.2\ldots n$ ***modis; ex omnibus illis modis quaerendus est is qui summam n numerorum electorum suppeditet maximam.***

Dispositis quantitatibus $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam

$$\begin{array}{cccc} h_1' & h_2' & \ldots & h_n' \\ h_1'' & h_2'' & \ldots & h_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \ldots & h_n^{(n)} \end{array}$$

earum systema appellabo ***schema propositum;*** omne schema inde ortum addendo singulis ejusdem seriei horizontalis terminis eandem quantitatem appellabo ***schema derivatum.*** Sit

$$l^{(i)}$$

quantitas addenda terminis i^{tae} seriei horizontalis, quo facto singula $1.2\ldots n$ aggregata transversalia, inter quae maximum eligendum est, eadem augebuntur quantitate

$$l' + l'' + \cdots + l^{(n)} = L,$$

quippe ad singula aggregata formanda e quaque serie horizontali unus eligendus est terminus. Qua de re si statuitur

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

atque aggregatum transversale maximum e terminis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)} = H,$$

fit valor aggregati transversalis maximi e terminis $p_k^{(i)}$ formati

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \cdots + p_n^{(i_n)} = H + L$$

et vice versa. Itaque ad maximum propositum inveniendum perinde est, sive quaestio de quantitatibus $h_k^{(i)}$, sive de quantitatibus $p_k^{(i)}$ instituatur.

Faciamus quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ sic determinatas esse, ut, quantitatibus $p_k^{(i)}$ ad instar quantitatum $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam dispositis et e quaque serie verticali termino maximo electo, maxima illa omnia in diversis seriebus horizontalibus jaceant. Unde si $p_k^{(i_k)}$ vocatur maximus terminorum

$$p_k', \quad p_k'', \quad \ldots \quad p_k^{(n)},$$

aggregatum

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \cdots + p_n^{(i_n)}$$

inter omnia aggregata transversalia e quantitatibus $p_k^{(i)}$ formata erit maximum. Hoc igitur casu sine negotio etiam habetur maximum aggregatum transversale e quantitatibus propositis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}.$$

Unde solutum est inaequalitatum problema propositum, simulatque inventae sunt quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ dictae conditioni satisfacientes.

Figuram quadraticam, in qua diversarum verticalium maxima simul in diversis seriebus horizontalibus sunt, brevitatis causa vocabo Canonem. Patet in ejusmodi *Canone* terminos omnes eadem quantitate augeri vel diminui posse; unde sequitur e quantitatibus l', l'', ... $l^{(n)}$ unam pluresve nullitati aequari posse, dum reliquae fiant positivae. Si $l^{(i)} = 0$, series $p_1^{(i)}$, $p_2^{(i)}$, ... $p_n^{(i)}$ eadem est atque series figurae propositae $h_1^{(i)}$, $h_2^{(i)}$, ... $h_n^{(i)}$, unde Canonis seriem, cui respondet quantitas l evanescens, vocabo in sequentibus seriem *immutatam*. Jam ex omnibus solutionibus una erit simplicissima, in qua scilicet singulae quantitates $l^{(i)}$ valores minimos positivos induunt, ita ut nulla alia detur, pro qua aliquae quantitatum $l^{(i)}$ valores inferiores obtinent, dum reliquae immutatae manent. Canonem ei solutioni respondentem appellabo *Canonem simplicissimum*, de cujus habitu in sequentibus agam.

Ad schema quadraticum quodcunque sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt. Sub voce *seriei* semper intelligam *horizontalem*: si de verticalibus sermo incidit, id diserte adjicietur. Sub voce *maximi* semper intelligam terminum inter omnes ejusdem *verticalis* maximum seu certe nullo reliquorum minorem. Unde appellabo *seriei maximum* eum seriei horizontalis terminum, qui maximus est inter omnes cum eo in eadem verticali positos. Fieri potest ut series nullum maximum habeat vel etiam plura inter se diversa.

At si figura Canonis instar constituta est, quaeque series uno certe maximo gaudet, quod, si in eadem serie plura insunt, semper ita sumere licet, ut omnia diversarum serierum maxima ad diversas verticales pertineant, i. e. *maximorum transversalium systema completum* forment. Consideremus in Canone simplicissimo horum maximorum systema, et si plura ejusmodi dantur, unum aliquod eligamus. Jam distribuamus omnes series quocunque modo in duas partes, series J et series K tales, ut nulla serierum K immutata sit, i. e. nulla quantitatum l, quae ad series K pertinent, evanescat: dico haberi

Theorema I. *In Canone simplicissimo e maximis serierum K saltem unum est, cui aequalis exstat terminus in eadem verticali positus et ad series J pertinens.*

Alioquin enim quantitates l ad series K pertinentes omnes eadem quantitate minuere liceret, usque dum aut una quantitatum l evanesceret, aut unum e maximis serierum K aequale evaderet alicui termino in eadem verticali posito et ad series J pertinenti. Neque enim ea re maxima diversarum serierum cessarent esse maxima, neque Canonis constitutio turbaretur. Quantitates l autem propositae eo casu non forent minimae positivae neque igitur Canon foret simplicissimus.

Si pro seriebus K sumitur series singularis, sequitur e theoremate praecedente hoc alterum

Theorema II. *In Canone simplicissimo seriei uniuscunque non immutatae maximo aequatur alter terminus in eadem verticali.*

Proposito Canone simplicissimo rursus eligamus unum certum systema completum maximorum transversalium. In serie quacunque α_1^{te}, cui respondet quantitas l non evanescens, sumatur *maximum*, cui secundum II. in eadem verticali sit aequalis terminus seriei α_2^{te}, in qua rursus sumatur *maximum*, cui aequatur in eadem verticali terminus seriei α_3^{te}, et ita porro. Si dato *maximo* plures aequantur termini in eadem verticali, processus praescriptus pluribus modis institui potest, sed habetur

Theorema III. *In Canone simplicissimo e variis modis a data serie per processum praescriptum ad alias transeundi unus semper exstat, quo pervenitur ad seriem immutatam i. e. seriem, cui respondet valor* $l = 0$.

Nam simulac theorema III. locum non habet, Canonis series in duo complexus dividantur, quorum primus omnes series amplectatur, ad quas a data serie per processum praescriptum transire licet et secundus omnes, ad quas transire non licet, ita ut series immutatae omnes in secundo complexu

sint. Quo facto primum complexum pro seriebus K, secundum pro seriebus J theorematis I. sumere licet. Ergo secundum theorema I. a serie primi complexus ad seriem secundi transitus datur, quod est contra hypothesin. Unde suppositio theorema III. locum non habere est absurda.

Canonem quemcunque, pro quo quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ respective induunt valores m', m'', ... $m^{(n)}$, quos semper positivos aut evanescentes suppono, in sequentibus brevitatis causa vocabo Canonem (m', m'', ... $m^{(n)}$). Quo statuto de binis Canonibus quibuscunque habetur

Theorema IV. *Propositis binis Canonibus, primo* (f', f'', ... $f^{(n)}$) *et secundo* (g', g'', ... $g^{(n)}$), *semper alius dabitur Canon* (m', m'', ... $m^{(n)}$) *talis, ut unaquaeque quantitas* $m^{(i)}$ *minimae ipsarum* $f^{(i)}$, $g^{(i)}$ *aut aequalis aut ea minor sit.*

Unde sequitur hoc Corollarium:

Canon simplicissimus est unicus, sive unicum datur systema quantitatum l', l'' ... $l^{(n)}$, *quae Canonem simplicissimum suppeditant.*

Sint quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, ... $g^{(n)}$ ipsis $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, ... $f^{(n)}$ respective majores, reliquae autem g', g'', ... $g^{(\alpha)}$ ipsis f', f'', ... $f^{(\alpha)}$ respective aut aequales aut minores. Vocemus respective $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ quantitates, quae primum et secundum Canonem constituunt, ubi generaliter fit

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

sitque rursus systema maximorum transversalium in primo Canone

$$q_1^{(i_1)}, \quad q_2^{(i_2)}, \quad \ldots \quad q_n^{(i_n)},$$

ubi omnes i_1, i_2, ... i_n inter se diversi sunt; in secundo Canone systema maximorum transversalium habetur etiam

$$r_1^{(i_1)}, \quad r_2^{(i_2)}, \quad \ldots \quad r_n^{(i_n)}.$$

Nam omnia aggregata transversalia secundi Canonis ab aggregatis respondentibus primi eadem quantitate

$$g' + g'' + \cdots + g^{(n)} - \{f' + f'' + \cdots + f^{(n)}\}$$

differunt, unde, cum aggregatum

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \cdots + q_n^{(i_n)}$$

maximum sit, etiam aggregatum

$$r_1^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \cdots + r_n^{(i_n)}$$

maximum esse debet. At in quoque Canone secundum definitionem ejus stabilitam datur aggregatum transversale maximum, cujus singuli termini sint maximi inter omnes ejusdem verticalis, quibus maximis respective in prima, secunda, ... n^{ta} verticali aequari debent termini

$$r_1^{(i_1)},\quad r_2^{(i_2)},\quad \ldots\quad r_n^{(i_n)},$$

ut eorum aggregatum et ipsum constituere possit maximum. Unde cum $i_1, i_2, \ldots i_n$ omnes inter se diversi sint, termini illi et ipsi systema maximorum transversalium constituunt, q. d. e.

Cum quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ $g^{(n)}$ respective ipsis $f^{(\alpha+1)}$, $f^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ $f^{(n)}$ majores sint, quantitates autem f', f'', $\ldots$ $f^{(n)}$ omnes supponantur $= 0$ aut positivae, quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ $g^{(n)}$ omnes sunt positivae > 0. Jam observo fieri non posse ut in Canonis $(g', g'', \ldots g^{(n)})$ serie $(\alpha+1)^{ta}$, $(\alpha+2)^{ta}$, $\ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, cui aequalis existat terminus in eadem verticali positus sed ad unam reliquarum serierum pertinens. Sit enim maximum illud in serie i_k^{ta}, terminus ei aequalis in serie i^{ta}, ut sit

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

ubi i est unus e numeris 1, 2, $\ldots$ α, atque i_k unus e numeris $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\ldots$ n: erit e formula supra tradita

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

ubi secundum suppositionem factam $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ atque $g^{(i)} - f^{(i)} \leqq 0$. Unde

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

quod absurdum est, cum $q_k^{(i_k)}$ sit maximum inter omnes terminos ejusdem verticalis q_k', q_k'', $\ldots$ $q_k^{(n)}$. Hinc cum in secundo Canone maximo in $(\alpha+1)^{ta}$, $(\alpha+2)^{ta}$, $\ldots$ vel n^{ta} serie posito nullus aequalis esse possit terminus in eadem verticali in reliquis seriebus positus, quantitates $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ $g^{(n)}$ omnes eadem quantitate decrescere possunt, reliquis immutatis manentibus, usque dum in aliqua serie $(\alpha+1)^{ta}$, $(\alpha+2)^{ta}$, $\ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, quod non superet valorem alius termini in eadem verticali ad reliquas series pertinentis, aut dum una quantitatum $g^{(\alpha+1)}$, $g^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ $g^{(n)}$ evanescat. Qua diminutione nullum maximum neque igitur Canonis natura destruitur. Si hac ratione obtinetur

$$(g', g'', \ldots g^{(\alpha)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots g_1^{(n)})$$

atque inter quantitates $g_1^{(\alpha+1)}$, $g_2^{(\alpha+2)}$, $\ldots$ ipsae $g_1^{(\beta+1)}$, $g_1^{(\beta+2)}$, $\ldots$ adhuc quantitatibus $f^{(\beta+1)}$, $f^{(\beta+2)}$, $\ldots$ majores sunt, eadem methodo novus Canon obtinetur, in quo quantitates illae denuo diminutionem subierunt, sicque pergere licet, usque dum perveniatur ad Canonem

$$(m', m'', \ldots m^{(\alpha)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \ldots m^{(n)}),$$

ubi quantitates uncis inclusae omnes quantitatibus respondentibus ipsarum f', f'', $\ldots$ $f^{(n)}$ et g', g'', $\ldots$ $g^{(n)}$ aut minores aut iis aequales sunt, q. d. e.

Sequitur e Theoremate IV.

Theorema V. *Nullus datur Canon, pro quo aliqua quantitatum* l', l'', ... $l^{(n)}$ *valorem minorem induat quam pro Canone simplicissimo.*

Scilicet si talis daretur Canon, per methodum antecedentem obtineri posset alius, pro quo una certe quantitatum l', l'', ... $l^{(n)}$ valorem minorem indueret quam pro Canone simplicissimo, reliquae autem valores non majores, quod est contra Canonis simplicissimi definitionem. Cum valor minimus, quem quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ obtinere possint, sit $= 0$, e propositione V. sequitur tanquam Corollarium

Theorema VI. *Series, quae in Canone quocunque habetur immutata, eadem in Canone simplicissimo inveniatur necesse est.*

Ut cognoscatur, utrum Canon aliquis sit simplicissimus necne, adhiberi potest haec propositio:

Theorema VII. *Proposito Canone atque in eo maximorum transversalium systemate electo, notentur primum series immutatae A, deinde series B, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series A pertinentes; deinde series C, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series B pertinentes et ita porro. Si hac ratione pergendo exhaurire licet omnes Canonis series, Canon erit simplicissimus.*

Pertineant quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ ad Canonem propositum, quantitates l_1', l_1'', ... $l_1^{(n)}$ autem ad alterum Canonem. Consideremus idem maximorum transversalium systema atque in theoremate proposito electum supponitur, cui etiam in altero Canone respondebit maximorum transversalium systema.

Sit $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, seriei γ^{tae} maximum in altero Canone gaudebit minore valore quam in Canone proposito. Pertineat series γ^{ta} ad complexum C, ita ut in Canone proposito maximo seriei γ^{tae} aequetur terminus alicujus seriei β^{tae} ad complexum B pertinentis, fieri etiam debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$. Vocando enim propositi Canonis terminos $p_k^{(i)}$, alterius $q_k^{(i)}$, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\beta)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)},$$

unde si $p_k^{(\gamma)} = p_k^{(\beta)}$ est maximum seriei γ^{tae}, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} = q_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} - \{l_1^{(\gamma)} - l^{(\gamma)}\}.$$

Unde cum sit $q_k^{(\gamma)}$ maximum in k^{ta} verticali ideoque $q_k^{(\gamma)} \geqq q_k^{(\beta)}$ atque $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, fieri debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$.

Porro in Canone proposito aequatur maximo seriei β^{tae} terminus seriei α^{tae} ad complexum A pertinentis, atque eodem modo demonstratur, fieri $l_1^{(\alpha)} < l^{(\alpha)}$, quod absurdum est, quia secundum suppositionem factam $l^{(\alpha)} = 0$ est atque

ipsae l_1, l_1', ... $l_1^{(n)}$ aut evanescentes aut positivae sunt. Eodem modo procedit reductio ab absurdum, ad quemcunque complexum A, B, C, D, ... pertineat series γ^{ta} cui respondet in altero Canone quantitas $l_1^{(\gamma)}$ minor quam in proposito $l^{(\gamma)}$. Unde si Canon ita constitutus est atque in VII. supponitur, pro nullo alio quantitates l valores induere possunt inferiores quam in proposito; sive Canon propositus est simplicissimus.

Antecedentia solutionem quoque continent problematis, *dato Canone quocunque invenire simplicissimum*. Supponere licet, in dato Canone unam ad minimum esse seriem immutatam; quae, nisi jam invenitur, obtineri potest ipsas l omnes eadem quantitate diminuendo. Ut in theoremate VII. serierum immutatarum complexum vocemus A atque complexus ibidem definitos B, C, ... formemus. Hac ratione pergendo si omnes series exhauriuntur, Canon secundum VII. jam ipse est simplicissimus. Ponamus autem relinqui series non praeditas talibus *maximis* quibus aequentur termini ejusdem verticalis ad complexus formatos pertinentes. Tum reliquarum serierum termini (vel quantitates l ad eas series pertinentes) omnes eadem quantitate diminuantur, usque dum earum quantitatum l una evanescat aut earum serierum *maximum* aliquod eo decreverit, ut ei aequalis terminus in eadem verticali ad complexus formatos pertinens inveniatur. Quo facto novus eruitur Canon, in quo auctus est numerus serierum pertinentium ad complexus regula indicata formatos. Si jam omnes series in complexus illos ineunt, Canon erutus erit simplicissimus. Si non, novus novusque Canon eadem methodo eruendus est, semperque pauciores a complexibus, qui formari possunt, relinquuntur series, unde tandem pervenietur ad Canonem, in quo complexus, qui formari possunt, series omnes exhauriunt, qui Canon est simplicissimus quaesitus.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	3	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon propositus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	22	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus I.

	I	II	III	IV	V	IV	VII	*l*
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus II.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	*l*
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	*l*
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

E schemate proposito, addendo terminis serierum diversarum respective numeros 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0 aliud obtinetur schema, in quo termini inter omnes ejusdem verticalis maximi in diversis seriebus horizontalibus sunt, quae est Canonis proprietas characteristica.

Proponitur Canonem simplicissimum investigare. Constituit in dato Canone series VII. complexum *A*. De reliquarum serierum terminis detraho unitatem, prodit Canon derivatus I.

In Canone derivato I. series IV. et VII. constituunt complexum *A*, series I. complexum *B*. De reliquarum terminis detraho 2, prodit Canon derivatus II.

In Canone derivato II. series III., IV., VII. constituunt complexum *A*, series I. et VI. complexum *B*; detrahendo de secunda et quinta serie unitatem, prodit Canon ultimus seu simplicissimus, cui respondent ipsarum *l* valores 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. Quos addendo terminis serierum diversarum schematis propositi, prodit Canon simplicissimus. Series III., IV., VII. complexum *A*, series I., II., V., VI. complexum *B* constituunt; quos complexus series omnes exhaurire videmus, quae est Canonis simplicissimi proprietas characteristica. —

Si non datur Canon aliquis, sed tantum schematis propositi termini, qui aggregatum maximum transversale constituunt, ad Canonem simplicissimum pervenitur cuique seriei minimam addendo quantitatem, qua efficitur, ut datus ejus terminus ad aggregatum transversale maximum pertinens fiat in sua verticali maximo aequalis. Quo negotio ad omnes series adhibito et si opus est repetito, tandem ad Canonem perveniri debet, qui erit simplicissimus, cum incrementa seriebus non majora addita sint, quam necessario postulatur, ut termini dati, in sua quisque verticali, maximi fiant.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Schema derivatum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Termini asteriscis notati aggregatum transversale maximum formant, scilicet sumsi schema propositum e Canone praecedente, seriebus horizontalibus

in verticales, verticalibus in horizontales conversis; quo facto manent termini aggregatum transversale maximum constituentes iidem, schema autem desinit esse Canon.

Seriebus

I., II., III., IV., V.

addo respective secundum datam regulam

8, 6, 8, 2, 7,

prodit schema derivatum.

Seriebus

I., II.

addo respective

6, 4,

prodit Canon simplicissimus quaesitus, in quo series III., IV., V., VI., VII. immutatae manent atque in schemate derivato. In Canone eruto constituunt series VI., VII. complexum A, series III., IV., V. complexum B, series I. complexum C, qui complexus cum omnes series amplectantur, indicium obtinuimus Canonem esse simplicissimum. —

Cum dato Canone etiam innotescat schematis propositi aggregatum transversale maximum, ad problema antecedentibus solutum revocari potest alterum problema, *dato Canone quocunque investigare simplicissimum*. Cujus igitur duplex habetur solutio, altera per subtractiones successivas, uti supra, altera per additiones successivas procedens, uti fit, si e dato Canone petimus schematis propositi aggregatum transversale maximum eoque cognito methodum antecedentem applicamus.

3.

Solutio problematis inaequalitatum in paragrapho praecedente tractati terminatur. Proposito schemate invenitur Canon.

Restat ut demonstretur, quomodo Canon aliquis investigari possit; quippe quocunque invento, vidimus variis modis erui simplicissimum. Proponamus igitur sequens inaequalitatum problema, quod pro principali haberi debet.

Problema.

Datis nn quantitatibus $h_k^{(i)}$, *ubi indicibus* i *et* k *valores* 1, 2, ... n *conveniunt, invenire tales* n *quantitates minimas positivas*

$$l', \quad l', \quad \ldots \quad l^{(n)},$$

ut posito

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

atque pro singulis k electo maximo inter terminos

$$p_k', \quad p_k'', \quad \ldots \quad p_k^{(n)},$$

quod sit

$$p_k^{(i_k)},$$

indices

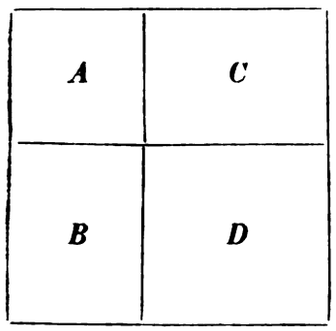
$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots \quad i_n$$

omnes inter se diversi sint.

Solutio.

Prima et quasi praeparatoria operatio eo consistit, ut, si in schemate proposito habentur series, in quibus nulla inveniantur ***maxima,*** earum quaeque minima quantitate augeatur, qua fit, ut unus ejus terminus aequalis evadat ***maximo*** in eadem verticali posito. Sic obtinetur novum schema, quod ***schema praeparatum*** voco et in quo quaeque series uno pluribusve maximis gaudet. Diversarum schematis praeparati serierum maxima omnia ad diversas verticales pertineant non necesse est. Sed ad minimum ***duarum*** serierum maxima habentur, quae ad ***duas*** verticales pertinent, in quem casum extremum non incidimus, nisi omnia maxima in una eademque serie jacent atque insuper in una eademque verticali termini omnes inter se aequales sunt; quod si secus fit, maximorum transversalium numerus semper est > 2. Si $n = 2$, prima illa operatione problema absolvitur.

In schemate praeparato quaero maximum numerum maximorum transversalium, quorum systema ubi pluribus modis eligi potest, sufficit unum certum eorum systema considerare. Quo electo solutionem problematis propositi ita adorno, ut numerus maximorum transversalium successive augeatur, usque dum eruatur schema systemate completo n maximorum transversalium praeditum, qui erit Canon quaesitus. Sufficit igitur demonstrare, idoneis serierum augmentationibus numerum maximorum transversalium unitate augeri posse.



Divido schema praeparatum in quatuor spatia A, B, C, D sicuti in figura apposita. Ponamus maxima transversalia electa omnia esse in spatio A, ita ut series, in quibus maxima illa sunt, occupent spatia A et C; verticales autem, ad quas pertinent, spatia A et B. Series spatia A et C occupantes voco ***superiores,*** spatia B et D occupantes ***inferiores.*** Porro verticales spatia A et B occupantes voco ***laevas,*** spatia C et D occupantes ***dextras.*** Jam in spatio D nullum invenitur

maximum. Alioquin enim numerus maximorum transversalium augeretur, contra hypothesin maximum numerum maximorum transversalium electum esse. Unde verticales dextrae sua habent maxima in C; termini autem serierum inferiorum in suis verticalibus maximi erunt in B, et eorum quisque aequatur maximo in eadem verticali in A posito, quum in spatio A sint maxima omnium verticalium laevarum, aeque ac serierum omnium superiorum.

His positis series omnes in tres Classes distribuo, quae sic eruuntur.

Eligo eas serierum superiorum, quae praeter maxima in A alio vel aliis in C positis gaudent, cujusmodi serierum una saltem exstat. Ponamus alicuius illarum serierum maximo in A posito aequari alium terminum in eadem verticali; quaeratur maximum in eadem serie cum hoc termino positum, et si huic rursus aequatur alius terminus in eadem verticali, rursus quaeratur maximum cum hoc termino in eadem serie positum et sic porro. Omnes series, ad quas hac ratione perveniri potest junctae seriebus a quibus proficiscendum erat, constituunt *Classem Primam.*

Dico inter series Primae Classis nullam inveniri seriem inferiorem, neque igitur ullam seriem superiorem, a qua per methodum indicatam ad seriem inferiorem perveniri liceat. Scilicet proficiscendo a serie quae praeter maximum in A alio in C gaudet, consideremus systema maximorum in A positorum, ad quae methodo indicata perveniatur; quorum ultimo, si fieri potest, aequetur terminus ejusdem verticalis in B positus. Maxima illa in A posita omnia secundum suppositionem sunt transversalia, quorum in locum aliud obtinebitur systema maximorum transversalium, si cuique substituitur ejusdem verticalis terminus aequalis. Qua in re ultimo maximo substituitur terminus in B positus, prima autem series, a qua profecti sumus, non amplius adhibetur. Unde novo maximorum systemati jungendo hujus seriei *maximum* in C positum, numerus maximorum transversalium unitate augetur, id quod contradicit suppositioni maximum numerum maximorum transversalium electum fuisse. Scilicet seriebus superioribus accederet inferior, in qua est terminus ultimo maximo aequalis, verticalibus autem laevis accederet dextra, in qua est maximum aliquod seriei a qua profecti sumus.

Ad *Classem Secundam* pertinent series superiores, quae non ad Primam Classem pertinent et a quibus nec ipsis methodo indicata ad seriem inferiorem transitus datur. Fieri potest ut haec Classis omnino non existat.

Ad *Classem Tertiam;* denique pertinent series inferiores omnes eaeque superiores a quibus methodo tradita ad series inferiores transitus datur. *Unde*

si terminus seriei inferioris aequatur maximo seriei superioris in eadem verticali — quod semper fit — ea series superior ad Classem Tertiam pertinebit. Tertia classis, nisi schema jam ipse Canon est, duabus saltem seriebus. una inferiore, una superiore constat.

Id quod supra de Classe Prima demonstravi jam ita enuntio, ut dicam, *inter series superiores Tertiae Classis nullam inveniri seriem, quae maximo in C posito gaudeat.* Qua propositionis forma postea utar.

Observationes hac occasione factae simul praebent methodum exhibendi maximum numerum maximorum transversalium in schemate praeparato. Etenim posito maximorum transversalium systemate quod primum se offert, ipsa classificatio serierum indicat si eorum numerus augeri potest.

Facta classificatione antecedentibus praescripta, *tota Classis Tertia eadem quantitate augeatur, eaque minima, qua efficitur, ut unus serierum ejus Classis terminus aequalis evadat termino maximo alicui ejusdem verticalis ad seriem Secundae aut Primae Classis pertinenti.*

Quod si ad Primam Classem pertinet maximum, numerus maximorum transversalium augeri potest. Dabitur enim series superior, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, et a qua via indicata ad seriem aliquam inferiorem transitus datur. Quae series adjicienda est serierum superiorum numero, dum verticalium laevarum numerus ea augendus est verticali dextra, in qua maximum illud in C positum invenitur. Si jacet in D terminus ille seriei Tertiae Classis maximo seriei Primae Classis aequalis, maxima transversalia immutata manent, eo tantum accedente termino. Si vero terminus ille jacet in B, omnia mutanda erunt maxima formantia catenam illam, qua ad seriem inferiorem descendebatur a serie praedita maximo in C posito. Scilicet cuique illorum maximorum transversalium substituendus est terminus ejusdem verticalis ei aequalis, ultimo igitur terminus ille in B, novis maximis transversalibus sic erutis accedente insuper maximo primae seriei in C posito, sicuti ad Primam Classem adnotavi.

Si maximum, cui aequatur terminus Tertiae Classis, in serie Secundae Classis est, nihil mutatur nisi quod haec series ad Tertiam Classem transmigrat simulque reliquae omnes Secundae Classis, a quibus per catenam indicatam ad illam seriem transitus datur. Repetita operatione rursus aut augebitur numerus maximorum transversalium, aut certe numerus serierum Secundae Classis minuitur, unde tandem, nisi antea numerus maximorum transversalium auctus est, ad schema pervenimus seriebus Secundae Classis destitutum, quippe quae

omnes ad Tertiam Classem transmigraverunt. Tum autem operatione praescripta certo obtinemus maximorum transversalium augmentationem. Quam si assecuti sumus, pro variis casibus, qui locum habere possunt et quos enumerare longum esset, nova facienda est maximorum transversalium distributio in tres Classes assignatas, quo facto eadem repetenda erit operatio, usque dum ad Canonem pervenimus, in quo series inferiores omnes ad superiores, verticales dextrae ad laevas transmigraverunt.

At per methodum antecedentibus traditam non solum Canonem sed Canonem simplicissimum eruimus. Quod ut pateat, demonstrabo quantitates, quibus augentur series, esse minimas quae poscuntur, ut omnino Canon prodeat. Ac primum, quod operationem praeparatoriam attinet, observo, Canonis terminos terminis respondentibus dati schematis aut superiores esse aut iis aequales, cum e dato schemate propositum sit Canonem eruere addendo singulis seriebus tantum quantitates positivas aut evanescentes. Unde in quaque Canonis verticali maximum aut superat aut aequat maximum in eadem verticali dati schematis. In Canone autem invenitur in quaque serie maximum, ideoque terminus aliquis, qui maximum in eadem verticali dati schematis aut superat aut aequat, unde quamque dati schematis seriem maximo destitutam tali augere debemus quantitate, ut unus ejus terminus maximum ejusdem verticalis superet aut aequet. Quodsi igitur quantitates notamus, quibus singuli seriei termini differunt a maximis in eadem verticali, quantitas qua series augenda est non minor esse debet quam illarum quantitatum minima. Unde quamque seriem maximo destitutam augendo quantitate minima, qua unus ejus terminus aequalis efficitur maximo ejusdem verticalis, certe series illas non majoribus auximus quantitatibus quam ad Canonem formandum flagitatur.

Post praeparationem factam si jam ipse Canon prodit, certo ille est simplicissimus; vidimus enim schematis propositi seriebus minimas quantitates positivas additas esse, quibus fieri possit, ut omnino Canon prodeat. Si vero nondum Canon prodiit, procedendum erat ad serierum distributionem in tres Classes assignatas. Jam demonstrabo ad Canonem eruendum *fieri non posse ut aliqua serierum Tertiae Classis immutata maneat.*

In demonstratione vocabo S schema praeparatum, K Canonem erutum. Semper suppono, quod jam ad classificationem serierum poscebatur, in S certum maximorum transversalium systema in spatio A ante oculos haberi, ita ut si plura ejusmodi dantur systemata in spatio A, unum aliquod ex iis eligendum

sit. Similiter in K suppono, si plura maximorum transversalium systemata dantur, unum certum eligi.

Consideremus in S cunctas series superiores Tertiae Classis *immutatas*, si quae dantur, sive eas, quibus nulla quantitas additur Canone K formando seu quae in S et K eaedem sunt. Vocemus harum serierum complexum H earumque consideremus maxima transversalia in S et K electa. *Dico horum maximorum systema in S atque K in iisdem verticalibus fore.* Sit enim M unum horum maximorum in K, in serie immutata positum; cui respondet in S terminus aequalis ejusdem seriei et ipse in sua verticali maximus. Nam cum a S ad K per additiones positivas perveniatur, cujusque verticalis termini in S inferiores aut aequales sunt respondentibus in K; unde si eorum maximo in K aequatur ejusdem verticalis terminus in S, is a fortiori inter ejusdem verticalis terminis in S maximus esse debet. Terminus M exstare debet in spatio A, cum series superior Tertiae Classis secundum proprietates Classium stabilitas non habeat terminos in sua verticali maximos in C positos. Vocemus V complexum verticalium in quibus sunt serierum H maxima in S, atque ponamus verticalem, in qua sit M, non pertinere ad verticales V. Exstabit in S in illa verticali maximum $N = M$ ad maxima transversalia in spatio A electa pertinens, quare maximum N in serie erit positum, quae non pertinet ad series H. Nam ipsarum H maxima transversalia electa in verticalibus V jacent, ipsum N autem in verticali supponitur, quae ad verticales V non pertinet. Haec nova series et ipsa superior esse debet ad Tertiam Classem pertinens; nam maximum N in spatio A jacet, et e definitione Classium tradita sequitur, si in eadem verticali sumuntur omnes termini maximi inter se aequales, series, in quibus positi sint, ad eandem Classem pertinere. Jam si ad Canonem K formandum illi seriei quantitas non evanescens addenda esset, terminus ipsi N in K respondens evaderet major ipso N ideoque etiam major termino M in eadem verticali posito, quod fieri non potest, cum sit M in sua verticali maximum. Unde series illa ipsa immutata esse debet, quod tamen absurdum est, quia suppositum est series H *cunctas* esse series Tertiae Classis immutatas. Unde ipsum M necessario in una verticalium V jacet; quod cum de quoque maximorum M valeat, sequitur, systema maximorum transversalium serierum H in K electorum in iisdem verticalibus esse atque systema maximorum transversalium earundem serierum H in S electorum, q. d. e.

Si sumuntur in S termini respondentes et aequales maximis serierum H in K, formabunt illi in S alterum systema terminorum maximorum trans-

versalium, qui cum maximis serierum H in iisdem seriebus horizontalibus et verticalibus sunt. Id quod fieri non potest, nisi utriusque systematis termini in eadem verticali positi inter se aequales sunt. Unde eruitur hoc Corollarium: *si in S in serie superiore Tertiae Classis immutata sumatur maximum, in eadem verticali haberi in K seriei alicujus superioris ejusdem classis maximum illi aequale.* Maxima autem in S ut in K semper suppono e systemate electo maximorum transversalium sumi.

Ceterum eadem ratione demonstratur propositio antecedens, si H designat complexum serierum Secundae Classis immutatarum; immo pro iis tantum propositio vi aliqua et significatione gaudet. Etenim Tertiae Classis omnino non existunt series immutatae.

Primum patet, *non dari series inferiores immutatas.* Si enim exstat series inferior immutata, sit M ejus maximum in K e systemate maximorum transversalium electorum; idem terminus in S erit maximus inter omnes ejusdem verticalis ideoque aequivalet maximo seriei alicujus superioris Tertiae Classis in eadem verticali posito et ad maxima transversalia pertinenti *). At secundum Corollarium antecedens in eadem verticali esse debet in K seriei alicujus superioris maximum ad maxima transversalia pertinens, unde in K haberentur duo maxima transversalia in eadem verticali, alterum in serie superiore, alterum M in inferiore, id quod maximorum transversalium notioni contrarium est.

Demonstrabo jam, *si series Tertiae Classis superior exstet immutata, etiam haberi inferiorem immutatam,* quod cum fieri non possit, probatum erit neque superiorem neque inferiorem seriem Tertiae Classis dari immutatam.

Ponamus dari seriem superiorem Tertiae Classis immutatam, quam per s designo. Secundum definitionem Tertiae Classis si s est series superior Tertiae Classis, dabuntur series $s, s_1, s_2, \ldots s_{m-1}$ tales, ut earum maxima $M, M_1, M_2, \ldots M_{m-1}$, quae e systemate maximorum transversalium electo sumenda sunt, habeant quodque in eadem verticali terminum aequalem N_i in serie subsequente, ultimo vero M_{m-1} aequetur in eadem verticali terminus N_{m-1} seriei inferioris, ut igitur bini N_i et M_{i+1} sint in eadem serie, bini inter se aequales M_i et N_i in eadem verticali. Jam si series superior Tertiae Classis s est immutata, secundum Corollarium antecedens dabitur in K maximum ipsi M aequale et in eadem verticali positum; unde ad Canonem formandum non

*) Vide supra Tertiae Classis definitionem p. 513.

augeri poterit series s_1, alioquin enim augeretur terminus N ipsoque maximo M in eadem verticali posito major evaderet. Unde series s_1 et ipsa immutata esse debet, similiterque probatur, omnes quoque $s_2, s_3, \ldots s_{m-1}$ nec non seriem inferiorem s_m immutatam fore, quod fieri non posse vidimus.

Cum ad Canonem formandum nulla series Tertiae Classis immutata manere possit, sit f minima quantitatum quibus illae series augeri debent, ita ut omnibus quantitate f auctis in novo schemate certe una earum exstet, quae ad Canonem formandum non amplius augenda sit, sed *immutata* maneat. Sit g quantitas minima qua ipsius S series Tertiae Classis augentur, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Secundae aut Primae Classis posito. Si $f' < g$ atque omnes series Tertiae Classis quantitate f' augentur, in novo schemate videmus distributionem serierum in Classes non alterari, sed quamque ad eandem pertinere Classem atque in S. Unde non poterit fieri $f < g$; alioquin enim haberetur schema, in quo daretur series aliqua Tertiae Classis immutata, quod fieri non potest. Hinc videmus, quantitatem minimam qua series Tertiae Classis augendae sint, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Primae aut Secundae Classis posito, aequalem aut inferiorem esse quantitate minima earum, quibus series Tertiae Classis ad Canonem formandum augeri debent. Unde sequitur regula tradita nunquam majores adhiberi additiones, quam ad Canonem quemcunque formandum necessarium sit, ideoque *Canonem regula nostra erutum fieri simplicissimum.*

Exemplum.

Schema propositum.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Schema praeparatum.

19*	15	14	12	14	12	19	t
17	18*	17	17	9	17	18	t
15	18	22	21	16	13	15	t
19	10	16	25	11	12	22	t
19	16	16	21	25	10	25	t
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Schema derivatum I.

20*	16	15	13	15	13	20	*t*
18	19*	18	18	10	18	19	
16	19	23*	22	17	14	16	
20	11	17	26	12	13	23	*t*
20	17	17	22	26	11	26	*t*
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Schema derivatum II.

21*	17	16	14	16	14	21	*t*
18	19*	18	18	10	18	19	
16	19	23*	22	17	14	16	
21	12	18	27*	13	14	24	
21	18	18	23	27	12	27	*t*
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Schema derivatum III.

22*	18	17	15	17	15	22	*t*
18	19*	18	18	10	18	19	*t*
16	19	23*	22	17	14	16	
21	12	18	27*	13	14	24	
22	19	19	24	28	13	28	*t*
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Canon simplicissimus.

25*	21	20	18	20	18	25
21	22*	21	21	13	21	22
16	19	23*	22	17	14	16
21	12	18	27*	13	14	24
25	22	22	27	31*	16	31
10	18	23	21	19	23*	21
5	14	10	27	31	20	40*

In schemate proposito tres primae series et quinta terminis maximis carent. Quibus seriebus respective additi sunt numeri minimi 8, 6, 7, 1, quibus fieri potuit, ut unus earum terminus evaderet maximus. In schemate sic praeparato in quaque verticali terminos maximos omnes sublineavi, insuper maxima transversalia electa stellavi (asterisco notavi). Deinde juxta scripto *t* denotavi series Tertiae Classis, quae sic inveniuntur. Primum enim ad eas pertinent omnes series α, quae carent termino stellato, quas supra inferiores appellavi; deinde series β, quae terminum stellatum habent in eadem verticali, in qua et aliquis serierum α terminus sublineatur; series β si praeter terminos stellatos alios habent sublineatos, in iisdem verticalibus quaeruntur novi termini stellati qui ad series γ pertinent, et ita porro: omnes series α, β, γ cet. facillime inventae formabunt Tertiam Classem. Patet autem ad regulam exsequendam tantum postulari ut series Tertiae Classis cognoscantur neque dis-

tributione in Primam et Secundam Classem opus esse. Regula enim nihil poscit nisi ut series Tertiae Classis omnes simul quantitate minima augeantur, qua fit, ut earum terminus unus aequetur reliquarum serierum termino maximo alicui stellato in eadem verticali posito. Totum igitur negotium consistit in hac augmentatione serierum, electione maximorum transversalium atque distributione serierum Tertiae Classis post quamque augmentationem denuo efficienda. Id quod continuandum est, usque dum series Tertiae Classis non amplius inveniuntur, quo casu ad Canonem simplicissimum pervenimus.

Schematis totius post quamque mutationem denuo scribendi negotium variis artificiis expediri potest. Scilicet ut a schemate aliquo ad proximum transeamus non opus est, ut alios terminos ante oculos habeamus quam qui in quaque verticali maximi sunt et maximis proxime inferiores, unde hos scribere sufficit. Porro cum serierum ordo non respiciendus sit, sufficit series tantum augendas delere et auctas infra reliquas scribere quae non mutantur. Sed haec et alia, quae commode in magna numerorum mole adhibentur, melius cujusque genio relinquuntur.

12.

Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone.

(Bruchstück aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

Wenn die Seiten eines Vielecks sich schneiden, in welchem Falle ein sogenanntes Sternpolygon entsteht, so hat man nicht mehr einen einzigen von einem Contoure umschlossenen Raum, sondern mehrere geschlossene Räume, die entweder durch eine gemeinschaftliche Ecke oder durch eine gemeinschaftliche Seite mit einander zusammenhängen. Die gewöhnlichen Entwicklungen über den Inhalt ebener Figuren hören für solche Vielecke auf ihre Gültigkeit zu haben. Man kann aber gleichwohl fragen, welches die geometrische Bedeutung des algebraischen Ausdruckes

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2+x_2y_3-y_2x_3+\cdots+x_ny_1-y_nx_1)$$

für solche Sternpolygone sei, und der Gleichmässigkeit wegen die diesem Ausdrucke gleiche geometrische Grösse den *Inhalt des Sternpolygons* nennen. Dieser Inhalt ist keineswegs der Summe der einzelnen durch das Polygon gebildeten Räume gleich. Denn man wird bei näherer Betrachtung finden, dass von diesen Räumen einige einfach, andere doppelt oder mehrfach, einige mit dem positiven, andere mit dem negativen Zeichen zu nehmen sind. Die Entscheidung hierüber ist bei einer etwas complicirten Sternfigur ziemlich beschwerlich. Ich will daher eine Regel angeben, nach welcher der Inhalt des Sternpolygons so leicht, wie es möglich scheint, jedesmal gefunden werden kann, wobei ich jedoch voraussetze, dass niemals durch einen Punkt mehr als zwei Seiten gehen.

Man bezeichne alle durch die Durchschnittspunkte der Seiten sowohl an den Ecken als auf den Seiten selbst gebildeten Punkte mit Zahlen in der Ordnung, wie sie im Sinne des Umfanges auf einander folgen, indem man von 1 anfängt. Es wird auf diese Weise jeder Punkt, welcher der Durchschnitt zweier nicht auf einander folgenden Seiten oder kein Eckpunkt ist, mit *zwei* verschiedenen Zahlen bezeichnet, da man, wenn man im Sinne des Umfanges herumgeht, durch solchen Punkt zweimal, durch jede Ecke einmal kommt. Von einer beliebigen Zahl an bilde man eine Reihe Zahlen, indem

man auf jede diejenige folgen lässt, welche sich bei demselben Punkte befindet, bei welchem die nächst grössere Zahl steht, oder die nächst grössere Zahl selbst, wenn sie allein steht. Dieses thue man so lange, bis man wieder auf die Zahl kommt, von welcher man ausgegangen ist, wobei man auf die grösste der die Punkte bezeichnenden Zahlen wieder 1 folgen lassen muss. Man kann leicht einsehen, dass man nie bei diesem Verfahren auf dieselbe Zahl zweimal kommt. Durch die angegebene Regel ist nämlich für jede gegebene Zahl der Reihe auch die unmittelbar vorhergehende bestimmt, da sie die nächst kleinere sein muss, als die bei demselben Punkte mit der gegebenen befindliche Zahl, oder als die gegebene selbst, wenn diese allein steht. Wären daher die m^{te} und $(m+m')^{\text{te}}$ Zahl dieselben, so müssten auch dieselben Zahlen ihnen vorhergehen und also die $(m'+1)^{\text{te}}$ mit der ersten übereinkommen, was gegen die Voraussetzung ist, da man die Reihe abzubrechen hat, sowie man wieder auf die erste zurückkommt. Schwieriger ist es allgemein zu zeigen, ***dass in der auf die angegebene Weise gebildeten Zahlenreihe niemals zwei demselben Punkte zugehörige Zahlen vorkommen können.*** —

Erläuterung des vorstehenden *Jacobi*schen Bruchstücks.

(Von Herrn *O. Hermes*.)

Um die zuletzt angedeutete Eigenschaft der zu bildenden Zahlenreihen darzuthun, empfiehlt es sich, die von *Jacobi* angegebene Bezeichnung der auf einander folgenden Eckpunkte und Schnittpunkte der Seiten des Sternpolygons für diesen Beweis dahin abzuändern, dass man jeden Eckpunkt, durch welchen man beim Verfolgen des Umfanges hindurchgeht, statt mit einer einzigen, nunmehr mit zwei unmittelbar auf einander folgenden Zahlen der Zahlenreihe, und denjenigen Eckpunkt, von welchem man ausgegangen ist, mit der ersten und letzten Zahl bezeichnet, so dass sich schliesslich an jedem Eckpunkte, sowie an jedem Schnittpunkte der Seiten der Figur zwei Zahlen befinden, welche Zahlen *conjugirte* heissen mögen. ***Alsdann ist von je zwei conjugirten Zahlen stets die eine gerade, die andere ungerade.***

Für die ***Eckpunkte*** ist diese Behauptung einleuchtend, denn an jedem derselben stehen zwei auf einander folgende Zahlen, mit Ausnahme desjenigen, von welchem aus der Umfang durchlaufen worden ist, an diesem aber stehen 1 und die letzte aller erhaltenen Zahlen; und dass diese eine gerade sein muss, folgt daraus, dass bei der gegenwärtigen Bezeichnung jeder Punkt, sei er Eck- oder Schnittpunkt, zwei Zahlen giebt.

Um die Behauptung auch für die Schnittpunkte zu beweisen, denke man sich, dass der den Umfang des Sternpolygons durchlaufende Punkt von dem Eckpunkt 1 anfangend durch einen bestimmten Schnittpunkt P bei g zum ersten Male, bei l zum zweiten Male hindurchgehe und bei $2r$ auf den Eckpunkt 1 zurückkomme. Dann kann man das gegebene Sternpolygon in zwei zerlegen, in das Polygon A, welches den Umlauf von g bis l umfasst und das Polygon B, welches den Umlauf von l bis

$2r$ und den sich daran anschliessenden von 1 bis g umfasst. Die zum Sternpolygon A gehörenden Zahlen von g bis l rühren her

1) von den Eckpunkten des Polygons A,
2) von den Punkten in welchen das Polygon A sich selbst durchschneidet,
3) von den Punkten (P ausgenommen), in welchen die Polygone A, B sich gegenseitig durchschneiden.

Jeder Punkt der ersten und zweiten Categorie giebt zwei Zahlen, jeder der dritten Categorie nur eine Zahl von den zwischen g und l liegenden. Aber die Anzahl der Punkte der dritten Categorie ist selbst gerade nach dem allgemeinen Grundsatz, dass je zwei geschlossene Curven sich in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden, folglich liegt zwischen g und l eine gerade Anzahl von Zahlen, d. h. von den beiden zum Schnittpunkt P gehörenden conjugirten Zahlen g, l ist die eine gerade, die andere ungerade, w. z. b. w.

Da nun in den zu bildenden Zahlenreihen auf jede Zahl die der nächst höheren conjugirte Zahl folgt, so besteht jede Reihe aus lauter Zahlen, welche mit der Ausgangszahl gleichzeitig gerade oder ungerade sind, und es können daher in einer Zahlenreihe zwei conjugirte Zahlen, von denen, wie bewiesen worden, die eine gerade, die andere ungerade ist, nicht gleichzeitig vorkommen.

Ferner ist zu bemerken, dass man fortdauernd neue geschlossene Zahlenreihen bilden kann, bis jede der die Eckpunkte oder Schnittpunkte der Seiten bezeichnenden Zahlen in einer dieser Reihen, und zwar wie gezeigt worden ist, einmal vorkommt. Nur die kleineren der conjugirten Zahlen an den Eckpunkten sind bei der Doppelnumerirung dieser Punkte in den Zahlenreihen nicht enthalten. Dieser Ausnahmefall tritt jedoch bei Anwendung der *Jacobi*schen Bezeichnung, welche für das Folgende wieder vorausgesetzt wird, nicht ein.

Nimmt man jetzt an, dass die Zahlen einer jeden Reihe die Eckpunkte einer geradlinigen Figur bedeuten, deren Umfang in demselben Sinne genommen werden soll, als in welchem die Zahlen der Reihe auf einander folgen, so werden durch die einzelnen Zahlenreihen ebensoviele geschlossene Figuren dargestellt, und zwar weil in den Reihen conjugirte Zahlen nicht vorkommen, Figuren, deren Umfänge nicht einen und denselben Punkt zweimal berühren, d. h. deren Seiten sich nicht durchschneiden, also Figuren, welche im Gegensatz zu den Sternpolygonen als Theilvielecke im engeren Sinne zu bezeichnen sind. Jede Seite dieser Vielecke ist in demselben Sinne durchlaufen, als die entsprechende Seite, oder das entsprechende Stück einer Seite des Sternpolygons, weil man bei der Bildung der Zahlenreihen von jeder Zahl zu der conjugirten der nächst höheren, also im Sinne des ursprünglichen Umfanges des Sternpolygons fortgeschritten ist, und umgekehrt wird jede Seite oder jedes Stück einer Seite des Sternpolygons durch eine Seite eines Theilvielecks, und zwar weil keine Zahl doppelt vorkommen kann, nur durch eine einzige Seite eines Theilvielecks dargestellt. Mit anderen Worten, die Theilvielecke haben nur Eckpunkte, niemals eine oder mehrere Seiten gemeinschaftlich und erfüllen die Ebene des Sternpolygons in der Weise, dass jede Seite oder jedes Stück einer Seite desselben durch eine Seite eines, aber auch nur eines einzigen Theilvielecks bedeckt wird.

Dies vorausgesetzt lässt sich nunmehr zeigen, dass der von *Jacobi* sogenannte ***Inhalt des Sternpolygons gleich ist der Summe aller durch die Zahlenreihen dargestellten Theilvielecke.***

Der Ausdruck nämlich $x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}$, wo x_k, y_k und x_{k+1}, y_{k+1} die rechtwinkligen Coordinaten zweier beliebiger Punkte p_k und p_{k+1} der Ebene sind, bedeutet den doppelten Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, welches durch den Anfangspunkt der Coordinaten O und die Punkte p_k und p_{k+1} als Eckpunkte bestimmt wird, und zwar für dieselbe Drehrichtung der geraden Linie Op_k in Op_{k+1}, als durch welche die x-Axe in die Lage der y-Axe gebracht wird, so dass wenn man von Op_k nach

Op_{k+1} durch die entgegengesetzte Drehrichtung gelangt, der Ausdruck den negativen doppelten Flächeninhalt des Dreieckes Op_kp_{k+1} bedeutet. Wenn man nun beliebig viele neue Punkte p_k', p_k'', p_k''', ... $p_k^{(m)}$ mit den zugehörigen Coordinaten $x_k'y_k'$, $x_k''y_k''$, $x_k'''y_k'''$, ... $x_k^{(m)}y_k^{(m)}$ in der angegebenen Reihenfolge auf der Verbindungsgeraden p_kp_{k+1} in der Richtung von p_k zu p_{k+1} zwischen diesen Punkten einschaltet, so kann man das Dreieck Op_kp_{k+1} durch die Summe der Dreiecke Op_kp_k', $Op_k'p_k''$, $Op_k''p_k'''$, ... $Op_k^{(m)}p_{k+1}$ ersetzen, und ebenso den Ausdruck $x_ky_{k+1}-y_kx_{k+1}$ durch die Summe der Ausdrücke $x_k^{(i)}y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}x_k^{(i+1)}$, wo für i der Reihe nach die Indices 0, 1, 2, ... m zu setzen sind, der Index 0 weggelassen wird und statt $x_k^{(m+1)}$ und $y_k^{(m+1)}$ die Coordinaten x_{k+1} und y_{k+1} eintreten.

Es ist also

$$x_ky_{k+1}-y_kx_{k+1} = x_ky_k'-y_kx_k'+x_k'y_k''-y_k'x_k''+\cdots+x_k^my_{k+1}-y_k^{(m)}x_{k+1}$$

und der Ausdruck für den doppelten Inhalt des Sternpolygons wird

$$2S = \Sigma(x_ky_{k+1}-y_kx_{k+1}) = \Sigma\Sigma(x_k^{(i)}y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}x_k^{(i+1)}),$$

wo die Summation in Beziehung auf k über alle Eckpunkte p_1 (oder p_{n+1}), p_2, p_3, ... p_n des Sternpolygons und die Summation in Beziehung auf i über alle auf den einzelnen Seiten p_kp_{k+1} liegenden Eck- und Schnittpunkte p_k (oder $p_k^{(0)}$), p_k', p_k'', ... $p_k^{(m)}$, p_{k+1} (oder $p_k^{(m+1)}$) in der angegebenen Reihenfolge auszudehnen ist. In dieser Doppelsumme lassen sich die Ausdrücke $x_k^{(i)}y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}x_k^{(i+1)}$ in beliebiger Reihenfolge und beliebig gruppenweis vertheilt summiren, und demnach kann man den Ausdruck für $2S$ darstellen als die Summe beliebig vieler, in beliebiger Reihenfolge gruppirter neuer Partialsummen von Ausdrücken $x_k^{(i)}y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}x_k^{(i+1)}$, sobald man sich vergewissert, dass in denselben zuletzt keiner dieser Ausdrücke, welche Werthe auch die Indices i und k haben mögen, fehlt und jeder im Sinne des Umfanges des ganzen Polygons in Rechnung gebracht ist.

Eine solche andere Darstellung von $2S$ wird durch die oben aus dem Sternpolygone ausgesonderten Theilvielecke vermittelt, wenn man an deren Stelle diejenigen Partialsummen von Ausdrücken $x_k^{(i)}y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}x_k^{(i+1)}$ setzt, welche den im Sinne des Umfanges auf einander folgenden Eckpunkten jener Theilvielecke entsprechen; denn wenn man die Vielecke sämmtlich in Rechnung zieht, so wird, wie gezeigt worden, jedes Stück des Umfanges des Polygons, und zwar in dem richtigen Sinne und nur einmal, berücksichtigt. Jede dieser Partialsummen aber stellt, weil die zugehörigen Vielecke Polygone im engeren Sinne sind, den Flächeninhalt eines solchen Theilvielecks dar, und zwar dem Sinne des Umfanges des Sternpolygons entsprechend: darum kann das Sternpolygon selbst als die Summe aller dieser Theilvielecke angesehen werden. —

13.

Ueber die Auflösung der Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u$$ *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine*.)

---

§. 1. Die Aufgabe wird gestellt.

In dieser Gleichung bedeuten die Grössen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

beliebige ganze positive oder negative Zahlen, und die Coefficienten des aus ihnen gebildeten linearen Ausdrucks,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_n$$

gegebene ganze positive oder negative Zahlen, ferner f den allen diesen Coefficienten gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie einen dergleichen haben, oder die Einheit, wenn sie mit keinem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind.

Es soll für die Grössen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

mittelst linearer Substitutionen eine gleiche Anzahl anderer Grössen eingeführt werden, welche ebenfalls jede beliebige ganze Zahl werden können, wenn man für $x_1, x_2, \ldots x_n$ *entsprechende Werthe setzt, und es soll eine derselben*

---

*) Das hier aufgestellte und gelöste Problem ist das nämliche, auf welches *Jacobi* (Monatsbericht der Berliner Akademie aus dem Jahre 1848, S. 414—417) die Reduction quadratischer Formen auf die kleinste Anzahl Glieder zurückführt. Er verspricht dort eine Lösung desselben an einem anderen Orte, während er in dem Abdruck des obengenannten Aufsatzes im 39sten Bande des *Crelle*schen Journals S. 290—292 und im 2ten Bande von *Jacobi*s gesammelten Werken S. 135—138, welcher einige Abänderungen in der Redaction enthält, „bei einer andern Gelegenheit mehrere Methoden hierfür angeben" will. In der vorliegenden Arbeit lernt man vier Methoden kennen.

An derselben Stelle S. 291 des Abdrucks im Journal und S. 137 der gesammelten Werke findet man eine wichtige Bemerkung unter dem Texte, die im Monatsberichte fehlt, in welcher *Jacobi* von periodischen Algorithmen spricht, auf welche man bei Einführung gewisser Grenzbedingungen geführt wird. Die weitere Ausführung dieser Andeutungen bildet den letzten Theil des mir vorliegenden Manuscriptes, — die Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen.

Man kann wohl annehmen, dass das Manuscript entstand, als *Jacobi* die Abhandlung aus dem Monatsberichte für das Journal redigirte, also spätestens im Anfange des Jahres 1850, da die in demselben Hefte folgende Arbeit von *Jacobi* das Datum des 17. März 1850 trägt. Andrerseits wird man aus einem Citate ersehen, dass das Manuscript frühestens am Anfange des Jahres 1849 begonnen wurde. *H.*

durch die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u$$

gegeben sein.

Ich will zuerst einige Bemerkungen über die Beschaffenheit der anzuwendenden Substitutionen voranschicken.

Man nenne zwei Systeme Grössen, von denen jedes durch das andere mittelst linearer (homogener) Gleichungen definirt wird, und welche, wie es hier der Fall sein soll, die Eigenschaft haben, dass immer wenn man für die Grössen eines von ihnen ganze positive oder negative Zahlen setzt, auch die Grössen des andern Systems ganze positive oder negative Zahlen werden, *äquivalente Systeme Grössen*. Man nenne ferner *reciproke Systeme Gleichungen* zwei Systeme linearer Gleichungen, von denen das eine ein System Grössen (B) durch ein anderes System Grössen (A), das andere umgekehrt die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrückt. Nach einem Satze der Algebra haben die Determinanten zweier Systeme von linearen Gleichungen, welche durch Umkehrung aus einander erhalten werden, reciproke Werthe, oder *es haben reciproke Gleichungen reciproke Determinanten.*

Man erhält zwei äquivalente Systeme von Grössen (A) und (B), wenn man für die Grössen (B) solche lineare Ausdrücke der Grössen (A) setzt, in denen die Coefficienten beliebige ganze Zahlen sind, deren Determinante ± 1 ist. Denn weil die Coefficienten dieser Ausdrücke ganze Zahlen sind, so werden immer die Grössen (B) ganze Zahlen, wenn man für die Grössen (A) ganze Zahlen setzt. Wenn man ferner die Gleichungen, welche die Grössen (B) durch die Grössen (A) ausdrücken, auflöst, so wird ihre Determinante, zufolge der für die algebraische Auflösung linearer Gleichungen bekannten Formeln, der gemeinschaftliche Nenner, mit welchem in den durch die Auflösung erhaltenen reciproken Gleichungen die Coefficienten der Grössen (B) behaftet werden. Da nun nach der Voraussetzung diese Determinante ± 1 ist, so werden auch die Coefficienten der reciproken Gleichungen ganze Zahlen. Es müssen daher immer auch die Grössen (A) ganze Zahlen werden, wenn man für die Grössen (B) ganze Zahlen setzt, oder es sind die Grössen (A) und (B) äquivalent, was zu beweisen war.

Auf die im Vorstehenden angegebne Art erhält man *alle* einem gegebnen Systeme Grössen äquivalenten Systeme, oder es gilt auch der umgekehrte Satz, *dass die Coefficienten der Gleichungen, welche ein System Grössen durch ein anderes äquivalentes ausdrücken, ganze Zahlen sein müssen, deren*

Determinante den Werth ± 1 *hat.* Dies ergiebt sich durch folgende Betrachtungen:

In den Gleichungen, welche die Grössen (B) durch äquivalente Grössen (A) ausdrücken, setze man eine der Grössen (A) der *Einheit* und alle übrigen der *Null* gleich, so werden die Coefficienten dieser Grössen in den verschiedenen Gleichungen die Werthe, welche die Grössen (B) für eine solche Bestimmung der Grössen (A) annehmen. Wenn man für die $=1$ gesetzte Grösse nach und nach alle verschiedenen desselben Systems nimmt, werden auf diese Weise sämmtliche Coefficienten Werthe, welche die Grössen des einen Systems annehmen, wenn man für die Grössen eines äquivalenten ganze positive Zahlen (hier 0 und 1) setzt. Es müssen daher zufolge der Definition äquivalenter Systeme die Coefficienten der Gleichungen, welche die Grössen (B) durch andere äquivalente Grössen (A) ausdrücken, ganze Zahlen sein. Aus demselben Grunde folgt, dass auch die Coefficienten der reciproken Gleichungen, welche die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrücken, ganze Zahlen sein müssen. Es werden hiernach auch die Determinanten der beiden reciproken Systeme Gleichungen, welche die Grössen (B) durch die Grössen (A) und welche die Grössen (A) durch die Grössen (B) ausdrücken, ganze Zahlen, da die Determinanten ganze Functionen der Coefficienten sind, und zwar müssen sie zufolge des oben angeführten Satzes solche ganze Zahlen werden, welche reciproke Werthe haben. Es ist aber ± 1 die einzige ganze Zahl, deren reciproker Werth auch wieder eine ganze Zahl ist, und es müssen daher diese Determinanten den Werth ± 1 haben.

Dem Vorstehenden zufolge kommt die vorgelegte Aufgabe mit der Aufgabe überein, *wenn eine Reihe von n Zahlen*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_n$$

gegeben ist, deren gemeinschaftlicher Theiler f ist, $n-1$ *andere Reihen von n Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass die Determinante der* n^2 *Zahlen* $= \pm f$ *wird.* Unter dieser Form hat neulich Herr *Hermite* die vorgelegte Aufgabe in einer lehrreichen Abhandlung behandelt*).

Ich werde jetzt, nachdem ich diese Bemerkungen über die anzuwendenden Substitutionen zur Erläuterung der Aufgabe vorausgeschickt habe, mehrere Auflösungen derselben mittheilen. Die beiden ersten Auflösungen setzen voraus, dass man zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nach Belieben eine ge-

*) *Liouville,* Journal de mathématiques T. XIV, année 1849, p. 21—30. M. vergl. den Schluss der Bemerk. auf S. 1. *H.*

wisse Reihenfolge annimmt, und man wird, je nachdem man diese oder jene Ordnung, in welcher sie auf einander folgen sollen, festgesetzt hat, die verschiedensten Resultate erhalten können. Die dritte Auflösung ist von dieser Willkür grossen Theils befreit, und behandelt die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf mehr gleichmässige Weise. Diese drei Auflösungen beruhen auf der wiederholten Anwendung des Verfahrens, durch welches der gemeinschaftliche Theiler zweier gegebenen Zahlen gesucht wird. Es giebt aber noch eine andere Auflösungsmethode, welche sich anderer Algorithmen bedient, die mannigfaltigster Anwendungen auf Arithmetik und Analysis fähig sind *); diese Methode wird hier als die vierte mitgetheilt.

§. 2. Die Aufgabe wird auf eine einfachere zurückgeführt.

Da f der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ist, so werden die Zahlen

$$\frac{\alpha_1}{f}, \quad \frac{\alpha_2}{f}, \quad \ldots \quad \frac{\alpha_n}{f}$$

keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Man kann daher die vorgelegte Gleichung mittelst Division durch f immer auf eine andere zurückführen, in welcher $f = 1$ oder die Coefficienten der Gleichung keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es kann dann der Fall eintreten, dass auch eine kleinere Anzahl dieser Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Dieser Fall wird sogar die Regel bilden, da schon für ein mässig grosses n die n Coefficienten sehr grosse Werthe haben müssen, wenn je $n-1$ derselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen **). Es lässt sich aber in diesem Falle die Gleichung auf eine andere zurückführen, welche eine geringere Anzahl Variabeln enthält.

---

*) Das Manuscript fährt hier folgender Massen fort: „Da diese mehrerer Entwicklungen bedürfen, so werde ich dieselben an einem andern Orte mittheilen, und hier nur die Auflösungen auseinandersetzen, welche sich an die gewöhnlichen Methoden anschliessen, da es gut schien, diese zuvor mit Sorgfalt zu erörtern". Von diesem ursprünglichen Plane weicht *Jacobi* ab, indem er nicht nur die vierte Methode sondern auch jene Anwendungen mittheilt. Ich musste mich daher zu einer Aenderung entschliessen und nahm hier noch die vierte Methode auf. Die Anwendungen sind der Gegenstand der folgenden Arbeit, welche den Titel erhalten hat, den ihr *Jacobi* als Ueberschrift eines Abschnittes gab. *H.*

**) Unten, bei der dritten Lösung, ist dieses weiter ausgeführt, und ein Beispiel für $n = 5$ gegeben (cf. §. 6). *H.*

Wenn nämlich von den n Coefficienten schon eine kleinere Anzahl, z. B. die Coefficienten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m,$$

keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so zerfällt die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u$$

in zwei andere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = v,$$

$$v = u - \alpha_{m+1} x_{m+1} - \alpha_{m+2} x_{m+2} - \cdots - \alpha_n x_n.$$

Die Aufgabe kommt dann bloss auf die Auflösung der ersten Gleichung zurück. Hat man nämlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ durch ein äquivalentes System von m anderen Grössen, von denen eine die Grösse v ist,

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_{m-1}, \quad v,$$

ausgedrückt, so hat man nur nöthig in diesen Ausdrücken für v seinen Werth aus der zweiten Gleichung zu substituiren. Man hat dann die gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Grössen

$$z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, u, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$$

ausgedrückt, und diese Grössen bilden, wie verlangt wird, ein den gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ äquivalentes System, zu welchem die durch die gegebene Gleichung bestimmte Grösse u gehört. Denn wenn nach der Voraussetzung die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$ und $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, v$ äquivalent sind, d. h. wenn die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, v$ immer ganze Zahlen werden, sobald $x_1, x_2, \ldots x_m$ ganze Zahlen sind, und umgekehrt, so werden auch die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}, u, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_m$ immer ganze Zahlen, wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganze Zahlen sind, und umgekehrt, und es werden daher auch diese beiden Systeme Grössen äquivalent sein.

Giebt es mehrere Gruppen von Coefficienten, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man jede solche Gruppe für die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ nehmen, und sich begnügen, in Bezug auf dieselben das obige Verfahren anzuwenden, nach welchem nur für die Variabeln, in welche die Coefficienten der gewählten Gruppe multiplicirt sind, neue Variabeln eingeführt werden. Je nachdem man diese oder jene Gruppe erwählt, wird man ganz andere Lösungen erhalten. Um auf die einfachste Art zu einer allgemeinen Lösung zu gelangen, wird man hierbei diejenige Gruppe wählen, welche die kleinste Anzahl Coefficienten, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, umfasst, weil man dann eine grössere Anzahl von den gegebenen Variabeln beibehalten kann, als dies bei einer andern Wahl der Fall sein würde.

Ist einer der Coefficienten z. B. $\alpha_1 = 1$, so hat man die Grössen $u, x_2, x_3, \ldots x_n$ selber als das einfachste, den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ äquivalente System Grössen, so dass man hier nur für eine Variable x_1 eine andere einzuführen hat, um die einfachste Lösung zu erhalten.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, was von Wichtigkeit für die dritte Lösung ist, *dass man die Aufgabe immer auf die Auflösung einer Gleichung*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u$$

zurückführen kann, in welcher die Coefficienten so beschaffen sind, dass es keine Zahl giebt, welche sie sämmtlich theilt, während je $n-1$ derselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

§. 3. Die Aufgabe wird in einem besondern Falle gelöst.

Ehe ich die verschiedenen Lösungen der allgemeinen Aufgabe mittheile, will ich mich zuerst mit dem leichtesten und einfachsten Falle *zweier* Variabeln beschäftigen, nämlich mit der Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = f.u$, da die Lösung derselben das Element bildet, aus dem die Lösung der allgemeinen Aufgabe zusammengesetzt werden kann.

Da nach der Voraussetzung

$$\frac{\alpha_1}{f} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_2}{f}$$

ganze Zahlen sind, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man zwei positive oder negative ganze Zahlen β und γ bestimmen, welche der Gleichung

$$\gamma \frac{\alpha_1}{f} - \beta \frac{\alpha_2}{f} = 1$$

genügen. Multiplicirt man diese Gleichung mit $f.u$ so erhält man

$$\alpha_1 . \gamma u - \alpha_2 . \beta u = f.u$$

oder allgemeiner

$$\alpha_1 \left\{ \gamma u - \frac{\alpha_2}{f} z \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{\alpha_1}{f} z - \beta u \right\} = f.u,$$

wo z eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Man kann daher

$$x_1 = \gamma u - \frac{\alpha_2}{f} z,$$

$$x_2 = -\beta u + \frac{\alpha_1}{f} z$$

setzen. Diese Gleichungen enthalten die verlangte Auflösung der vorgelegten

Gleichung. Denn, da die Ausdrücke rechts ganze Zahlen zu Coefficienten haben, deren Determinante

$$\gamma\frac{\alpha_1}{f}-\beta\frac{\alpha_2}{f}$$

der Einheit gleich ist, so ist das System der Grössen u und z, von denen eine die durch die vorgelegte Gleichung bestimmte Grösse u ist, dem Systeme der Grössen x_1 und x_2 äquivalent.

Durch Umkehrung erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f.u,$$
$$\beta x_1+\gamma x_2 = z,$$

von denen die erste die vorgelegte Gleichung selber ist.

§. 4. Erste Auflösung der Gleichung $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n = f.u$.

Es sei f_2 der gemeinschaftliche Theiler von α_1 und α_2, so kann man zufolge der im Vorhergehenden gelösten Aufgabe für die Grössen x_1 und x_2 ein äquivalentes System anderer Grössen z_1 und y_2 von der Beschaffenheit einführen, dass

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f_2 y_2.$$

Es sei ferner f_3 der gemeinschaftliche Theiler von f_2 und α_3, so kann man für die Grössen y_2 und x_3 ein äquivalentes System anderer Grössen z_2 und y_3 von der Beschaffenheit einführen, dass

$$f_2 y_2+\alpha_3 x_3 = f_3 y_3.$$

Fährt man so fort, und nennt allgemein f_i den gemeinschaftlichen Theiler von f_{i-1} und α_i, so hat man das folgende System Gleichungen *):

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 = f_2 y_2, \\ f_2 y_2+\alpha_3 x_3 = f_3 y_3, \\ f_3 y_3+\alpha_4 x_4 = f_4 y_4, \\ \quad\cdots\cdots \\ f_{n-2} y_{n-2}+\alpha_{n-1} x_{n-1} = f_{n-1} y_{n-1}, \\ f_{n-1} y_{n-1}+\alpha_n x_n = f_n y_n. \end{cases}$$

Da f_i der gemeinschaftliche Theiler von f_{i-1} und α_i, f_{i-1} der gemeinschaftliche

*) Eine spätere Hinzufügung zum Manuscripte machte hier eine Redactionsänderung erforderlich. H.

Theiler von f_{i-2} und α_{i-1} u. s. f., f_3 der gemeinschaftliche Theiler von f_2 und α_3, endlich f_2 der gemeinschaftliche Theiler von α_1 und α_2 ist, so wird f_i der gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$. Es ist daher f_n der gemeinschaftliche Theiler aller Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und daher *ist f_n der Theiler f selbst. Es kommt also y_n mit u überein.*

Da z_1 und y_2 ein den Grössen x_1 und x_2, und z_2 und y_3 ein den Grössen y_2 und x_3 äquivalentes System ist, so sind z_1, y_2, z_2, y_3 den Grössen x_1, x_2, y_2, x_3 äquivalent, oder es ist z_1, z_2, y_3 ein den Grössen x_1, x_2, x_3 äquivalentes System. Ebenso ergiebt die Zusammenstellung aller Substitutionen, aus welchen die Gleichungen (1.) erhalten worden sind, dass

$$z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, \ldots z_{n-2}, y_{n-1}, z_{n-1}, u$$

ein den Grössen

$$x_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, \ldots y_{n-2}, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n$$

äquivalentes System Grössen sind, woraus folgt, wenn man die beiden Systemen gemeinschaftlichen Grössen fortlässt, dass das System der Grössen

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-2}, z_{n-1}, u$$

dem System der gegebnen Grössen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$$

äquivalent ist. Da nun aus (1.) die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n = f.u$$

folgt, so haben wir für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine äquivalentes System anderer Grössen eingeführt, von denen eine die durch die vorgelegte Gleichung bestimmte Grösse u ist, was die Aufgabe verlangt.

Um die Substitutionen selbst zu erhalten, durch welche im Vorigen für die gegebenen Variabeln nach und nach andere äquivalente eingeführt worden sind, suche man solche positive oder negative ganze Zahlen

$$\beta_1, \gamma_1; \quad \beta_2, \gamma_2; \quad \ldots \quad \beta_{n-1}, \gamma_{n-1},$$

welche den Gleichungen genügen

$$(2.) \quad \begin{cases} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_1 = f_2, \\ f_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_2 = f_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_n\beta_{n-1} = f_n. \end{cases}$$

Man wird alsdann, zufolge der von der Elementaraufgabe gegebenen Lösung, die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} x_1 = \gamma_1 y_2 - \frac{\alpha_2}{f_2} z_1, & x_2 = -\beta_1 y_2 + \frac{\alpha_1}{f_2} z_1, \\ y_2 = \gamma_2 y_3 - \frac{\alpha_3}{f_3} z_2, & x_3 = -\beta_2 y_3 + \frac{f_2}{f_3} z_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n-1} = \gamma_{n-1} y_n - \frac{\alpha_n}{f_n} z_{n-1}, & x_n = -\beta_{n-1} y_n + \frac{f_{n-1}}{f_n} z_{n-1} \end{cases}$$

haben, von denen je zwei in derselben Horizontalreihe befindliche die entsprechende von den Gleichungen (1.) ergeben. Ausserdem erhält man noch durch Auflösung von je zwei in derselben Horizontalreihe befindlichen Gleichungen die folgenden:

$$(4.)\quad \begin{cases} z_1 = \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\ z_2 = \beta_2 y_2 + \gamma_2 x_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{n-1} = \beta_{n-1} y_{n-1} + \gamma_{n-1} x_n. \end{cases}$$

Umgekehrt wird man aus den Gleichungen (1.) und (4.) die Gleichungen (3.) erhalten.

Mittelst der Gleichungen (1.), (3.), (4.) kann man leicht durch Elimination der $n-2$ Hülfsgrössen

$$y_2,\quad y_3,\quad \ldots\quad y_{n-1}$$

die beiden äquivalenten Systeme Grössen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n \quad \text{und} \quad z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{n-1},\ y_n$$

unmittelbar durch einander ausdrücken. Man kann nämlich aus den Gleichungen (1.) durch successive Substitution, indem man die letzte Gleichung fortlässt, die Hülfsgrössen

$$y_2,\quad y_3,\quad \ldots\quad y_{n-1}$$

durch $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1}$ ausdrücken. Die Substitution dieser Ausdrücke in (4.) und in die letzte der Gleichungen (1.) giebt dann die verlangten Ausdrücke von $z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{n-1},\ y_n$ durch $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$. Auf ähnliche Art werden aus dem ersten System der Gleichungen (3.), indem man von der untersten Gleichung anfängt und die erste fortlässt, durch successive Substitution die Ausdrücke der Hülfsgrössen $y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{n-1}$ durch $y_n,\ z_{n-1},\ z_{n-2},\ \ldots\ z_2$ gefunden, deren Substitution in die übrigen Gleichungen (3.) die Ausdrücke von $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ durch $z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{n-1},\ y_n$ giebt.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2 y_2 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \\ f_3 y_3 &= f_2 y_2 + \alpha_3 x_3, \\ &\cdots\cdots \\ f_{n-1} y_{n-1} &= f_{n-2} y_{n-2} + \alpha_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

erhält man nach und nach

$$(5.)\quad \left\{ \begin{aligned} y_2 &= \frac{\alpha_1}{f_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_2} x_2, \\ y_3 &= \frac{\alpha_1}{f_3} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_3} x_2 + \frac{\alpha_3}{f_3} x_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= \frac{\alpha_1}{f_{n-1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_{n-1}} x_2 + \frac{\alpha_3}{f_{n-1}} x_3 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} x_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\ z_2 &= \beta_2 y_2 + \gamma_2 x_3, \\ &\cdots\cdots \\ z_{n-1} &= \beta_{n-1} y_{n-1} + \gamma_{n-1} x_n, \\ y_n &= \frac{f_{n-1}}{f_n} y_{n-1} + \frac{\alpha_n}{f_n} x_n, \end{aligned}$$

so erhält man die folgenden Ausdrücke der neuen Variabeln

$$z_1,\quad z_2,\quad \ldots\quad z_{n-1},\quad u$$

aus den gegebenen $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$(6.)\quad \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, \\ z_2 &= \frac{\beta_2}{f_2}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \gamma_2 x_3, \\ z_3 &= \frac{\beta_3}{f_3}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \gamma_3 x_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1} &= \frac{\beta_{n-1}}{f_{n-1}}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) + \gamma_{n-1} x_n, \\ u &= \frac{1}{f_n}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_n x_n). \end{aligned} \right.$$

Die letzte von diesen Gleichungen ist die vorgelegte Gleichung selber.

Aus den Gleichungen

$$y_{n-1} = \gamma_{n-1} y_n - \frac{\alpha_n}{f_n} z_{n-1},$$

$$y_{n-2} = \gamma_{n-2} y_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} z_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_2 = \gamma_2 y_3 - \frac{\alpha_3}{f_3} z_2$$

erhält man nach und nach, wenn man mit $I_i^{'k}$ das Product

$$\gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_k = I_i^{'k}$$

bezeichnet, die folgenden Werthe der Hülfsgrössen $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ durch die neuen Variabeln ausgedrückt:

$$(7.)\quad \begin{cases} y_{n-1} = I_{n-1}^{'n-1} y_n - \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n}, \\ y_{n-2} = I_{n-2}^{'n-1} y_n - I_{n-2}^{'n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \dfrac{\alpha_{n-1} z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\ y_{n-3} = I_{n-3}^{'n-1} y_n - I_{n-3}^{'n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - I_{n-3}^{'n-3} \dfrac{\alpha_{n-1} z_{n-2}}{f_{n-1}} - \dfrac{\alpha_{n-2} z_{n-3}}{f_{n-2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_2 = I_2^{'n-1} y_n - I_2^{'n-2} \dfrac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \cdots - I_2^{'2} \dfrac{\alpha_4 z_3}{f_3} - \dfrac{\alpha_3 z_2}{f_3}. \end{cases}$$

Wenn man diese Werthe in die folgenden Gleichungen substituirt, welche in dem System der Gleichungen (3.) enthalten sind,

$$(7^*.)\quad \begin{cases} x_n = -\beta_{n-1} y_n + \dfrac{f_{n-1} z_{n-1}}{f_n}, \\ x_{n-1} = -\beta_{n-2} y_{n-1} + \dfrac{f_{n-2} z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2 = -\beta_1 y_2 + \dfrac{\alpha_1 z_1}{f_2}, \\ x_1 = \gamma_1 y_1 - \dfrac{\alpha_2 z_1}{f_2}, \end{cases}$$

so erhält man, wenn man u für y_n setzt,

$$(8.)\quad \left\{\begin{array}{l} x_n = -\beta_{n-1}u + \frac{f_{n-1}z_{n-1}}{f_n}, \\ x_{n-1} = \beta_{n-2}\left\{-I'^{n-1}_{n-1}u + \frac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n}\right\} + \frac{f_{n-2}z_{n-2}}{f_{n-1}}, \\ x_{n-2} = \beta_{n-3}\left\{-I'^{n-1}_{n-2}u + I'^{n-2}_{n-2}\frac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} + \frac{\alpha_{n-1}z_{n-2}}{f_{n-1}}\right\} + \frac{f_{n-3}z_{n-3}}{f_{n-2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2 = \beta_1\left\{-I'^{n-1}_{2}u + I'^{n-2}_{2}\frac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} + \cdots + I'^{2}_{2}\frac{\alpha_4 z_3}{f_4} + \frac{\alpha_3 z_2}{f_3}\right\} + \frac{\alpha_1 z_1}{f_2}, \\ x_1 = I'^{n-1}_{1}u - I'^{n-2}_{1}\frac{\alpha_n z_{n-1}}{f_n} - \cdots - I'^{2}_{1}\frac{\alpha_4 z_3}{f_4} - I'^{1}_{1}\frac{\alpha_3 z_2}{f_3} - \frac{\alpha_2 z_1}{f_2}. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (6.) und (8.), welche zu einander reciprok sind, haben dieselbe charakteristische Form. In jedem dieser beiden Systeme Gleichungen enthalten nämlich die beiden letzten rechts alle Glieder, und jede vorhergehende Gleichung immer ein Glied weniger, so dass die erste Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen nur zwei Glieder hat. *Wenn man ferner in einer beliebigen Gleichung rechts das letzte Glied fortlässt, so giebt das lineare Aggregat der übrigen Variabeln, wenn man dasselbe mit verschiedenen constanten Factoren multiplicirt, die linearen Aggregate derselben Variabeln in den folgenden Gleichungen.*

Ich bemerke noch, dass, abgesehen von den zwischen den Grössen α_i, β_i, γ_i, f_i Statt findenden Relationen (2.), die Determinante sowohl der Gleichungen (6.) als der Gleichungen (8.) durch dasselbe Product

$$\frac{\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_1}{f_2}\cdot\frac{f_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_2}{f_3}\cdot\cdots\cdot\frac{f_{n-1}\gamma_{n-1} - \alpha_n\beta_{n-1}}{f_n}$$

dargestellt werden kann. Die einzelnen Factoren dieses Products werden zufolge der Gleichungen (2.) der *Einheit* gleich, weshalb auch, wie es bei reciproken Gleichungen zwischen zwei äquivalenten Systemen Grössen nach dem oben angeführten Satze der Fall sein muss, die beiden Determinanten selbst der *Einheit* gleich werden.

Dieselbe Rechenoperation, welche zur successiven Auffindung der Zahlen $f_2, f_3, \ldots f_n$ dient, führt zugleich auch zur Bestimmung der Zahlen β_i und γ_i. Denn wenn man von dem Kettenbruch, in den man den Bruch

$$\frac{\alpha_{i+1}}{f_i}$$

zu entwickeln hat, um den grössten Theiler f_{i+1} von f_i und α_{i+1} zu finden, den letzten Partialbruch fortlässt, und den übrig bleibenden Kettenbruch von

hinten berechnet, so giebt der Zähler und Nenner des so erhaltenen Bruches die Werthe von β_i und γ_i, welche die Gleichung

$$\frac{f_i}{f_{i+1}}\gamma_i - \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}\beta_i = 1$$

erfüllen. Es können also die Zahlen β_i und γ_i immer so angenommen werden, dass, abgesehen vom Zeichen,

$$\beta_i < \tfrac{1}{2}\frac{f_i}{f_{i+1}}, \qquad \gamma_i < \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}$$

wird. Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (6.), welche die statt der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzuführenden Grössen mittelst der Formel

$$z_i = \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_1 x_1 + \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_2 x_2 + \cdots + \frac{\beta_i}{f_i}\alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1}$$

geben, die Coefficienten von $x_1, x_2, \ldots x_{i+1}$ ihrem absoluten Werthe nach respective kleiner als die Zahlen

$$\tfrac{1}{2}\frac{\alpha_1}{f_{i+1}}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_2}{f_{i+1}}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_i}{f_{i+1}}, \quad \frac{\alpha_{i+1}}{f_{i+1}}$$

werden. Dagegen können die Gleichungen (8.), welche direct angeben, welche Ausdrücke der neuen Grössen man für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu substituiren hat, sehr grosse Coefficienten erhalten, da z. B. u in dem Ausdrucke von x_1 die Zahl I_1^{n-1} oder das Product $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}$ zum Coefficienten hat. Es wird daher eine zweite Lösung wünschenswerth sein, welche solche Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die für dieselben einzuführenden Grössen giebt, in denen die Coefficienten möglichst kleine Zahlen werden.

§. 5. Zweite Lösung.

Wenn es bloss darauf ankommt, für ein gegebenes u Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, welche die Gleichung

$$\frac{\alpha_1}{f}x_1 + \frac{\alpha_2}{f}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{f}x_n = u$$

erfüllen, so reichen hierzu die Gleichungen (1.) hin, welche die Stelle der gegebenen Gleichung vertreten. Schreibt man nämlich die Gleichungen (1.) in verkehrter Ordnung, indem man zugleich f und u für f_n und g_n setzt, so erhält man

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{f_{n-1}}{f} y_{n-1} + \frac{\alpha_n}{f} x_n = u, \\ \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} y_{n-2} + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} x_{n-1} = y_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{f_2}{f_3} y_2 + \frac{\alpha_3}{f_3} x_3 = y_3, \\ \frac{\alpha_1}{f_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{f_2} x_2 = y_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach und nach die Zahlen

$$x_n \text{ und } y_{n-1},\ x_{n-1} \text{ und } y_{n-2},\ \ldots\ x_3 \text{ und } y_2,\ x_2 \text{ und } x_1$$

finden, und dieselben so bestimmen, dass wenn $i \geqq 2$ und f_i statt α_i gesetzt wird, vom Zeichen abgesehen immer

$$x_i < \tfrac{1}{2} \frac{f_{i-1}}{f_i}$$

wird. Die Grenze von x_1 würde von der Grösse von u abhängen, und am leichtesten aus der vorgelegten Gleichung selbst entnommen werden.

Allgemeine Ausdrücke, welche, für $x_1, x_2, \ldots x_n$ gesetzt, der vorgelegten Gleichung genügen, und in denen zugleich die Coefficienten verhältnissmässig kleine Zahlen sind, wird man aus denselben Gleichungen (9.) ableiten, wenn man jede derselben nach der zu Anfang entwickelten Vorschrift auflöst, und immer die kleinsten Werthe nimmt, welche man für die Coefficienten der für die beiden Variabeln jedesmal zu substituirenden Ausdrücke erhalten kann.

Aus der ersten Gleichung (9.)

$$\frac{f_{n-1}}{f} y_{n-1} + \frac{\alpha_n}{f} x_n = u$$

erhält man nämlich, wenn man die Zahlen a' und b' durch die Gleichung

$$\frac{f_{n-1}}{f} a' + \frac{\alpha_n}{f} b' = 1$$

bestimmt, die allgemeinen Ausdrücke

$$x_n = b'u + \frac{f_{n-1}}{f} u',$$

$$y_{n-1} = a'u - \frac{\alpha_n}{f} u',$$

wo u' eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nach Substitution dieses Aus-

drucks von y_{n-1} wird die zweite Gleichung (9.)

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} y_{n-2} + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} x_{n-1} = a'u - \frac{\alpha_n}{f} u'.$$

Bestimmt man *vier* ganze Zahlen a'', b'' und a_1'', b_1'' durch die Gleichungen

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} a'' + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} b'' = a',$$

$$\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} a_1'' + \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} b_1'' = -\frac{\alpha_n}{f},$$

so erhält man für x_{n-1} und y_{n-2} die allgemeinen Ausdrücke

$$x_{n-1} = b''u + b_1'' u' + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} u'',$$

$$y_{n-2} = a''u + a_1'' u' - \frac{\alpha_{n-1}}{f_{n-1}} u'',$$

wo u'' ebenfalls eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Fährt man so fort, so erhält man die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} x_n = b'u + \frac{f_{n-1}}{f} u', \\ x_{n-1} = b''u + b_1'' u' + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} u'', \\ x_{n-2} = b'''u + b_1''' u' + b_2''' u'' + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}} u''', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2 = b^{(n-1)}u + b_1^{(n-1)}u' + b_2^{(n-1)}u'' + \cdots + b_{n-2}^{(n-1)}u^{(n-2)} + \frac{\alpha_1}{f_2} u^{(n-1)}, \\ x_1 = a^{(n-1)}u + a_1^{(n-1)}u' + a_2^{(n-1)}u'' + \cdots + a_{n-2}^{(n-1)}u^{(n-2)} - \frac{\alpha_2}{f_2} u^{(n-1)}, \end{cases}$$

wo die Zahlen $a_k^{(i)}$ und $b_k^{(i)}$ aus den Zahlen $a_k^{(i-1)}$ und $b_k^{(i-1)}$ durch die Formeln

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} a^{(i)} + \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} b^{(i)} = a^{(i-1)}, \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} a_1^{(i)} + \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} b_1^{(i)} = a_1^{(i-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} a_{i-2}^{(i)} + \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} b_{i-2}^{(i)} = a_{i-2}^{(i-1)}, \\ \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} a_{i-1}^{(i)} + \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} b_{i-1}^{(i)} = -\frac{\alpha_{n-i+2}}{f_{n-i+2}} \end{cases}$$

gefunden werden. Man erhält ferner

$$(12.)\quad y_{n-i} = a^{(i)}u + a_1^{(i)}u' + \cdots + a_{i-1}^{(i)}u^{(i-1)} - \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} u^{(i)}.$$

Die Zahlen $b_k^{(i)}$ können immer so bestimmt werden, dass abgesehen vom Zeichen

$$b_k^{(i)} < \tfrac{1}{2} \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}}$$

wird.

Man sieht, dass auch in den Gleichungen (10.) die Zahl der Glieder rechts nur in den beiden letzten Gleichungen vollständig ist und in den vorhergehenden immer um eins abnimmt. Aber es wird dies nicht mehr bei den zu (10.) reciproken Gleichungen der Fall sein, deren jede im Allgemeinen sämmtliche Variabeln x_i enthält. Dass bei dieser Lösung auch die Zahlen $a_k^{(n-1)}$, welche die Coefficienten des für x_1 gefundenen Ausdrucks bilden, niemals sehr gross werden, erhellt aus den Gleichungen

$$(12^*.) \quad \begin{cases} a^{(n-1)} = -\dfrac{1}{\alpha_1}\{\alpha_2 b^{(n-1)} + \alpha_3 b^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n b' - f\}, \\ a_k^{(n-1)} = -\dfrac{1}{\alpha_1}\left\{\alpha_2 b_k^{(n-1)} + \alpha_3 b_k^{(n-2)} + \cdots + \alpha_{n-k} b_k^{(k+1)} + \alpha_{n-k+1} \dfrac{f_{n-k}}{f_{n-k+1}}\right\}, \end{cases}$$

in welchen k die Werthe 1, 2, ... $n-2$ annehmen kann. Diese Gleichungen ergeben sich aus (10.) durch die Betrachtung, dass sich durch Substitution der für x_1, x_2, ... x_n gefundenen Ausdrücke das Aggregat

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

auf den einen Term $f.u$ reduciren muss.

Da sowohl das System der Grössen u, z_1, z_2, ... z_{n-1} als das System der Grössen u, u', u'', ... $u^{(n-1)}$ dem System der Grössen x_1, x_2, ... x_n äquivalent ist, so müssen diese beiden Systeme Grössen auch einander äquivalent sein. Denn zwei Systeme Grössen, welche einem dritten äquivalent sind, sind auch untereinander äquivalent. Man findet die Gleichungen, welche die Variabeln z_1, z_2, ... z_{n-1} durch die Variabeln u, u', u'', ... $u^{(n-1)}$ ausdrücken, und mittelst deren man die beiden im Vorigen gegebenen Lösungen auf einander zurückführen kann, auf folgende Art:

Zufolge (2.) genügen die Zahlen β_{n-i} und γ_{n-i} der Gleichung

$$\frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} \gamma_{n-i} - \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} \beta_{n-i} = 1,$$

und zufolge (11.) die Zahlen $a_k^{(i)}$ und $b_k^{(i)}$ der Gleichung

$$\frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} a_k^{(i)} + \frac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} b_k^{(i)} = a_k^{(i-1)},$$

wo

$$a_{i-1}^{(i-1)} = -\frac{\alpha_{n-i+2}}{f_{n-i+2}}$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus, dass man immer

$$(13.)\quad \begin{cases} a_k^{(i)} = \gamma_{n-i} a_k^{(i-1)} + \dfrac{\alpha_{n-i+1}}{f_{n-i+1}} \lambda_k^{(i)}, \\ b_k^{(i)} = -\beta_{n-i} a_k^{(i-1)} + \dfrac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} \lambda_k^{(i)} \end{cases}$$

setzen kann, wo $\lambda_k^{(i)}$ eine ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x_{n-i+1} &= b^{(i)} u + b_1^{(i)} u' + \cdots + b_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} u^{(i)}, \\ &= -\beta_{n-i} \{ a^{(i-1)} u + a_1^{(i-1)} u' + \cdots + a_{(i-1)}^{(i-1)} u^{(i-1)} \} \\ &\quad + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} \{ \lambda^{(i)} u + \lambda_1^{(i)} u' + \cdots + \lambda_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + u^{(i)} \}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist zufolge (12.) der in $-\beta_{n-i}$ multiplicirte Ausdruck $= y_{n-i+1}$; es ist ferner zufolge (7*.)

$$x_{n-i+1} = -\beta_{n-i} y_{n-i+1} + \frac{f_{n-i}}{f_{n-i+1}} z_{n-i},$$

und es wird daher

$$(14.)\quad z_{n-i} = \lambda^{(i)} u + \lambda_1^{(i)} u' + \cdots + \lambda_{i-1}^{(i)} u^{(i-1)} + u^{(i)}.$$

Durch diese allgemeine Formel können die beiden Lösungen auf einander zurückgeführt werden, nachdem man für jedes i die Zahlen $\lambda_k^{(i)}$ aus einer der Gleichungen (13.) bestimmt hat.

Beide im Vorigen gegebene Lösungen hängen von der willkürlichen Anordnung der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ab, und führen je nach der verschiedenen Reihenfolge, die man zwischen diesen Zahlen annimmt, zu verschiedenen Systemen von Grössen, welche man für die gegebenen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzuführen hat. Eine mehr symmetrische Lösung ist die folgende.

§. 6. Dritte Lösung.

Es soll im Folgenden angenommen werden, dass die Coefficienten der vorgelegten Gleichung von einem gemeinsamen Theiler befreit sind, oder dass $f = 1$. Man kann ferner voraussetzen, dass je $n-1$ der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ einen gemeinsamen Theiler haben, weil wenn dies nicht der Fall ist, die Aufgabe, wie man oben §. 2 gesehen hat, immer auf eine einfachere zurückgeführt werden kann, in welcher diese Voraussetzung Statt findet.

Es sei h_i die grösste Zahl, welche alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ausser α_i theilt, so werden je zwei von den Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_n$ zueinander relative Primzahlen sein. Denn ein gemeinsamer Theiler von h_i und h_k müsste alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ausser α_i und auch alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ausser α_k theilen; da zu den letzteren Zahlen auch α_i gehört, so müsste derselbe alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ theilen, die doch keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen. Umgekehrt ist α_i durch alle Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_n$ ausser h_i theilbar, und da keine zwei von diesen Zahlen einen gemeinsamen Theiler haben, so muss α_i auch durch das Product aller Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_n$ ausser h_i theilbar sein. Wenn man daher

$$(15.) \qquad h_1 h_2 \ldots h_n = H, \qquad \alpha_i = \frac{H}{h_i} m_i$$

setzt, so wird m_i eine ganze Zahl, und es kann diese ganze Zahl keinen gemeinschaftlichen Theiler mit h_i haben, weil dieser wieder gegen die Voraussetzung alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ theilen müsste.

Da h_i alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ausser α_i theilt, so folgt aus der vorgelegten Gleichung, dass x_i einer Gleichung von der Form

$$(16.) \qquad \alpha_i x_i + h_i w_i = u$$

genügen muss. Bestimmt man daher zwei positive oder negative ganze Zahlen c_i und d_i durch die Gleichung

$$(17.) \qquad \alpha_i c_i + h_i d_i = 1,$$

so wird, wie man weiss, der allgemeine Werth von x_i die Form

$$(18.) \qquad x_i = c_i u + h_i v_i$$

erhalten, in welchem, abgesehen vom Zeichen,

$$c_i < \tfrac{1}{2} h_i$$

angenommen werden kann, und v_i eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn man die vorgelegte Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u$$

durch H dividirt, so erhält sie nach Substitution der Gleichungen (15.) die Form

$$(19.) \qquad \frac{m_1 x_1}{h_1} + \frac{m_2 x_2}{h_2} + \cdots + \frac{m_n x_n}{h_n} = \frac{u}{H}.$$

Substituirt man in diese Gleichung für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihre durch die Formel (18.) gegebenen Werthe

$$x_i = c_i u + h_i v_i,$$

und setzt

$$(20.) \qquad \frac{1}{H} - \left\{ \frac{m_1 c_1}{h_1} + \frac{m_2 c_2}{h_2} + \cdots + \frac{m_n c_n}{h_n} \right\} = g,$$

so erhält man

$$(21.) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n = gu.$$

In dieser Gleichung (21.) ist g eine ganze Zahl. Multiplicirt man nämlich die Gleichung, durch welche g bestimmt ist, mit H, so erhält man vermöge (15.)

$$1 - \{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n\} = gH.$$

Es ist aber die Grösse links eine ganze Zahl, welche durch jede der Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_n$ theilbar ist. Denn es theilt jede dieser Zahlen h_i nach der Voraussetzung alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ mit Ausnahme von α_i und vermöge (17.) auch die Zahl $1 - \alpha_i c_i$ und mithin die Zahl

$$1 - \{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n\}.$$

Es wird daher die letztere Zahl auch durch das Product $H = h_1 h_2 \ldots h_n$ theilbar sein, da je zwei von den Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_n$ relative Primzahlen zu einander sind; und da diese Zahl $= gH$ ist, so wird gH eine ganze durch H theilbare Zahl, und mithin g eine ganze Zahl sein.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen wird die vorgelegte Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = u,$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber je $n-1$ von diesen Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind, auf die Gleichung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n = gu$$

zurückgeführt. Hat man nämlich ein den Grössen $v_1, v_2, \ldots v_n$ äquivalentes System von Grössen, von welchen eine die durch die Gleichung (21.) bestimmte Grösse gu ist, gefunden und setzt die für $v_1, v_2, \ldots v_n$ zu substituirenden Ausdrücke in die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche durch die Gleichung (18.)

$$x_i = c_i u + h_i v_i$$

gegeben sind, so hat man die für $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu substituirenden Ausdrücke, welche der vorgelegten Aufgabe Genüge leisten.

Die Gleichung (21.) unterscheidet sich von der vorgelegten Gleichung in mehreren Punkten. Zunächst bemerkt man, dass an die Stelle von u die Grösse gu getreten ist, so dass in den für $v_1, v_2, \ldots v_n$ zu substituirenden Ausdrücken die Coefficienten von u immer den Factor g haben müssen. Denn es hat g keinen Theiler mit sämmtlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gemein, weil diese Zahlen überhaupt keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, indem sonst

wie aus (15.) erhellt, auch sämmtliche Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssten, was gegen die Voraussetzung ist. Aber die Gleichung (21.) unterscheidet sich von der vorgelegten Gleichung wesentlich dadurch, dass es unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ auch keine $n-1$ giebt, welche einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn hätten z. B. die $n-1$ Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$ einen gemeinschaftlichen Theiler p, so würde aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{H}{h_1} m_1, \quad \alpha_2 = \frac{H}{h_2} m_2, \quad \ldots \quad \alpha_{n-1} = \frac{H}{h_{n-1}} m_{n-1}$$

folgen, dass sämmtliche Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ durch ph_n theilbar sind, was der Voraussetzung, dass h_n der *grösste* gemeinschaftliche Theiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ sein soll, zuwider ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass man unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ immer $n-1$ oder weniger wird angeben können, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es wird dies sogar auf mehrere, wenigstens auf s Arten geschehen können. Es kann daher nach der im Anfang gemachten Bemerkung die Gleichung (21.) unmittelbar auf eine andere zwischen nur ν Variabeln zurückgeführt werden, wo $\nu < n$, und man kann in dieser Gleichung, wie es in der vorgelegten vorausgesetzt worden ist, wieder annehmen, dass zwar alle ν Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber je $\nu-1$ derselben mit einem gemeinschaftlichen Theiler behaftet sind. Denn gäbe es unter den ν Variabeln $\nu-1$, deren Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so würde man die Gleichung (21.) auf eine zwischen diesen $\nu-1$ Variabeln Statt findende Gleichung zurückführen können.

Die Zurückführung der vorgelegten Gleichung auf die Gleichung (21.) wird hiernach immer eine wirkliche Vereinfachung gewähren, indem die Gleichung (21.) sich unmittelbar auf eine der vorgelegten ganz ähnliche Gleichung zwischen weniger Variabeln reducirt. Diese letztere hat man dann wieder einer ähnlichen Reduction zu unterwerfen und so fortzufahren, bis man auf eine Gleichung kommt, in welcher einer der Coefficienten der *Einheit* gleich ist, in welchem Falle, wie man im §. 2 gesehen hat, die Lösung unmittelbar gegeben ist.

Das Verfahren, durch welches die vorgelegte Gleichung auf die Gleichung (21.) zurückgeführt worden ist, bezog sich auf alle Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf eine vollkommen gleichmässige Art. Aber in Betreff der weitern Reduction findet eine gewisse Willkür Statt, indem sich, wie man gesehen hat, aus den

Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ immer auf mehrere verschiedene Arten Gruppen solcher Zahlen auswählen lassen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben: jeder solcher besondern Gruppe aber wird immer ein besonderer Verlauf der ferneren Rechnung entsprechen. Wenn es unter diesen Gruppen eine giebt, welche aus einer kleineren Anzahl von Coefficienten als alle übrigen besteht, so wird man in der Regel vorzugsweise diese auswählen.

Die Gleichung (21.) bietet auch noch dadurch eine wesentliche Reduction der vorgelegten Gleichung, dass in ihr die Coefficienten im Verhältniss zu ihren ursprünglichen Werthen immer überaus verkleinert sind. Ist z. B. $n = 5$, so sind die kleinsten Werthe, welche die fünf ursprünglichen Coefficienten annehmen können, wenn nach der gemachten Voraussetzung keine vier ohne einen gemeinschaftlichen Factor sein sollen *),

$$210m_1, \quad 330m_2, \quad 462m_3, \quad 770m_4, \quad 1155m_5.$$

Man sieht hieraus, wie viel kleiner die Zahlen m_1, m_2, etc. oder die Coefficienten der reducirten Gleichung (21.) als die Coefficienten der vorgelegten Gleichung α_1, α_2, etc. werden müssen. Es wird daher in der Regel eine der Zahlen m_1, m_2, etc. der Einheit gleich werden, in welchem Falle die Aufgabe gelöst ist. Wenn z. B. $m_n = 1$, so hat man nur nöthig, in der Gleichung

$$x_n = c_n u + h_n v_n$$

für v_n seinen Werth aus (21.)

$$v_n = gu - \{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1}\}$$

einzuführen, wodurch man

$$x_n = (c_n + gh_n)u - h_n\{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1}\}$$

erhält. Es bilden dann $u, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ das für $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzuführende äquivalente System Grössen, durch welche $x_1, x_2, \ldots x_n$ mittelst der vorstehenden Gleichung aus den Gleichungen (18.) ausgedrückt werden.

§. 7. Vierte Lösung.

Im 2ten Bande der *Opuscula Analytica* von *Euler* S. 91 (wieder abgedruckt im 2ten Bande von *Leonhardi Euleri Commentationes Arithmeticae collectae*, Petersburg 1849 S. 99) findet man in einer Abhandlung *De relatione inter*

*) Da diese fünf gemeinschaftlichen Factoren relative Primzahlen sein müssen, so sind ihre kleinsten Werthe 2, 3, 5, 7 und 11, deren Product H durch je eine von ihnen getheilt, die nachfolgenden Factoren der m giebt. H.

ternas pluresve quantitates instituenda eine Methode, um einen Ausdruck

$$aA+bB+cC,$$

in welchem A, B, C gegebene Grössen sind, durch möglichst kleine ganze positive oder negative Zahlen a, b, c der *Null* gleich zu machen, wenn A, B, C rational sind, oder wenn dies nicht der Fall ist, dieses näherungsweise zu erreichen, oder auch, wenn zwischen den irrationalen Grössen A, B, C eine solche lineare Relation

$$aA+bB+cC = 0$$

in welcher a, b, c ganze Zahlen sind, Statt findet, diese zu entdecken. Die Methode ist der der successiven Division bei ganzen Zahlen analog, indem man die beiden grösseren von den gegebenen Grössen immer durch die Reste ersetzt, die sie durch die kleinste dividirt übrig lassen, so dass der kleinste Rest der nächste Divisor wird.

Euler setzt die erwähnte Methode an mehreren Beispielen auseinander, wobei er zeigt, wie man für die zu suchenden ganzen Zahlen allgemeine Formeln finden kann. Es soll hier genügen, die beiden ersten Beispiele zu wiederholen, wobei nur, ohne den Gang der *Euler*schen Rechnung zu ändern, auf der rechten Seite statt 0 allgemeiner u gesetzt werden soll, damit man sogleich sieht, wie diese Methode auch auf das hier behandelte Problem Anwendung findet.

Erste Aufgabe. *Solche ganze positive oder negative Zahlen a, b, c zu finden, dass*

$$49a+59b+75c = 0.$$

Die *Euler*schen Rechnungen lösen die allgemeinere Aufgabe, für a, b, c solche Ausdrücke äquivalenter Grössen, von denen eine u ist, zu finden, dass

$$49a+59b+75c = u.$$

Nach der allgemeinen Regel hat man zu setzen:

$$(22.)\quad \begin{cases} a+\ b+\ c=d, & 10b+26c+49d=u, \\ b+2c+4d=e, & 6c+\ 9d+10e=u, \\ c+\ d+\ e=f, & 3d+\ 4e+\ 6f=u, \\ d+\ e+2f=g, & e\ \ \ \ +\ 3g=u. \end{cases}$$

Euler bricht die Rechnung früher ab, indem er, was für seine Aufgabe, in welcher $u=0$, verstattet ist, sogleich $3e$ für e setzt, wodurch auch eine geringe Modification in den folgenden Zahlen herbeigeführt wird.

Aus dem zweiten System der vorstehenden Gleichungen folgt nach und nach

$$\begin{aligned} e &= u - 3g, \\ d &= -u + 4g - 2f, \\ c &= -g + 3f, \\ b &= 5u - 17g + 2f \end{aligned}$$

und aus der ersten Gleichung des ersten Systems

$$a = -6u + 22g - 7f,$$

und man sieht in der That, wenn man die vorstehenden, für a, b, c gefundenen Ausdrücke substituirt, dass die Gleichung

$$49(-6u+22g-7f)+59(5u-17g+2f)+75(-g+3f) = u$$

identisch erfüllt wird. Die *Euler*schen Werthe von a, b, c werden aus den vorstehenden erhalten, wenn man $u=0$ und $f-2e$ und $-e$ für f und g setzt.

Die vorstehende Lösung hat die Eigenschaft, *dass sämmtliche Coefficienten des in die grösste Zahl multiplicirten Ausdrucks die absolut kleinsten Werthe erhalten, nämlich die Werthe* 0, −1, 3.

Wollte man dieselbe Aufgabe nach den früher angegebenen Methoden lösen, so würde man

$$\begin{aligned} 59b+75c = y &= u-49a, \\ b = 14y+75z &= 14u-686a+75z, \\ c = -11y-59z &= -11u+539a-59z \end{aligned}$$

zu setzen haben, und man sieht, mit wie grossen Coefficienten in den Ausdrücken von b und c man den Vortheil erkaufen muss, die eine Grösse a unverändert zu lassen, oder für die eine Gleichung bloss $a=a$ zu setzen.

Man findet ferner aus dem ersten Systeme der Gleichungen (22.)

$$f = e+d+c = 5d+3c+b = 8c+6b+5a,$$
$$g = 2f+e+d = 3e+3d+2c = 15d+8c+3b = 23c+18b+15a.$$

Es werden demnach die beiden reciproken Systeme Gleichungen zwischen den beiden äquivalenten Systemen Grössen a, b, c und u, f, g

$$\begin{aligned} a &= -6u-7f+22g, & u &= 49a+59b+75c, \\ b &= 5u+2f-17g, & f &= 5a+6b+8c, \\ c &= 3f-g, & g &= 15a+18b+23c. \end{aligned}$$

Aus dem zweiten System dieser Gleichungen ersieht man, dass die Aufgabe,

zu der Reihe Zahlen 49, 59, 75 zwei andere Reihen von 3 Zahlen zu finden, so dass die Determinante aller 9 Zahlen der Einheit gleich wird, durch die Zahlen

$$\begin{matrix} 49 & 59 & 75 \\ 5 & 6 & 8 \\ 15 & 18 & 23 \end{matrix}$$

gelöst wird.

Wegen der Neuheit dieser Methode, die, obgleich seit 1775 publicirt *), doch niemals angewendet worden zu sein scheint, will ich noch ein anderes von *Euler* gegebenes complicirteres Beispiel, jedoch wieder in seiner allgemeineren Form, hinzufügen.

Zweite Aufgabe. *Die Grössen a, b, c durch andere äquivalente, von denen eine u ist, auszudrücken, so dass*

$$1000000a + 1414214b + 1732051c = u$$

wird.

Die in b und c multiplicirten Zahlen, durch den Coefficienten von a dividirt, sind hier die Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

Man erhält zufolge der *Euler*schen Rechnung nach und nach

$$\begin{aligned}
a+b+c &= d, & 414214b+732051c+1000000d &= u,\\
b+c+2d &= e, & 317837c+171572d+414214e &= u,\\
d+c+2e &= f, & 146265c+71070e+171572f &= u,\\
e+2c+2f &= g, & 4125c+29432f+71070g &= u,\\
**)\ c+7f+17g &= h, & 557f+945g+4125h &= u,\\
f+g+7h &= i, & 388g+226h+557i &= u,\\
g+h+2i &= k, & 162g+105i+226k &= u,\\
g+i+2k &= l, & 57g+16k+105l &= u,\\
3g+k+6l &= m, & 9g+9l+16m &= u,\\
g+l+m &= n, & 7m+9n &= u,\\
m+n &= p, & 2n+7p &= u,\\
n+3p &= q, & p+2q &= u,\\
p+2q &= u.
\end{aligned}$$

*) Hiermit ist gemeint, dass die im 2ten Bande der Opuscula Analytica 1785 zum ersten Male gedruckte Arbeit bereits 1775 von *Euler* der Petersburger Akademie mitgetheilt worden war, wie aus der Notiz: (Op. anal. II. 1785, p. 91. Exhib. 1775. Aug. 14) in den Opera collecta hervorgeht. *H.*

**) In den Opusc. anal. ist die Rechnung von dieser Stelle an, wegen Vertauschung von 557 mit 575, unrichtig. In den Opera collecta ist die Rechnung richtig weitergeführt. *H.*

Euler, welcher $u = 0$ hat, setzt die Rechnung nur bis zur Gleichung

$$9g + 9l + 16m = 0$$

fort, die er durch die Annahme

$$g = 1, \quad l = -1, \quad m = 0$$

erfüllt, wofür er nach und nach findet:

$$k = 3, \quad i = -8, \quad h = 18, \quad f = -135, \quad c = 946, \quad e = -1621,$$
$$d = 2161, \quad b = -6889, \quad a = 8104.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen kann man durch successive einfache Substitutionen leicht a, b, c durch l, q, u oder umgekehrt l, q, u durch a, b, c ausdrücken, wovon das eine hinreicht. Das Letztere wird dadurch eine Erleichterung gewähren, dass man den Ausdruck von u schon kennt, da er durch die vorgelegte Gleichung gegeben wird; dagegen wird man bei der Aufgabe, a, b, c durch l, q, u auszudrücken, mit kleineren Zahlen zu thun haben.

Man erhält nach und nach

$$q = u + 3p = 3m + 4n = 4g + 4l + 7m = 25g + 7k + 46l;$$
$$q - 46l = 25g + 7k = 32g + 7h + 14i = 14f + 46g + 105k$$
$$= 105c + 749f + 1831g = 1831e + 3767c + 4411f$$
$$= 4411d + 8178c + 10653e = 10653b + 18831c + 25717d$$
$$= 25717a + 36370b + 44548c;$$
$$l = g + i + 2k = 3g + 2h + 5i = 5f + 8g + 37h = 37c + 264f + 637g$$
$$= 637e + 1311c + 1538f = 1538d + 2849c + 3713e$$
$$= 3713b + 6562c + 8964d = 8964a + 12677b + 15526c.$$

Hieraus ergeben sich durch Substitution zwischen den Grössen a, b, c und u, l, q die folgenden Gleichungen

$$u = 1000000a + 1414214b + 1732051c$$
$$49l - q = 1175a + 1661b + 2030c$$
$$l = 8964a + 12677b + 15526c,$$

welche man durch die *Euler*schen Werthe

$$u = 0, \quad q = 0, \quad l = -1$$
$$a = 8104, \quad b = -6889, \quad c = 946$$

prüfen kann. Durch Umkehrung dieser Gleichungen erhält man die Ausdrücke von a, b, c durch u, q, l; doch ist diese Umkehrung, da sie die Bildung von 18 Producten erfordert, beschwerlicher, als wenn man die Ausdrücke von a, b, c durch u, q, l direct durch die successiven Substitutionen sucht.

Durch die im Vorigen befolgte, von *Euler* gegebene Regel, immer durch den kleinsten der drei Coefficienten zu dividiren, wird in dem zweiten Beispiel, wie

man sieht, der Gang der Rechnung unregelmässig, indem die zuerst eingeführten Grössen nicht auch immer zuerst wieder eliminirt werden, und nicht jeder der Ausdrücke, für welchen eine neue Grösse gesetzt wird, aus den zuletzt eingeführten Grössen besteht. So kommt die Grösse c in fünf Gleichungen, die Grösse g gar in sieben Gleichungen vor, dagegen d, e, h, i, k nur in drei Gleichungen, während bei einer regelmässigen Ordnung jede Grösse, die ersten und letzten ausgenommen, in vier Gleichungen vorkommen müssten wie f. *Um einen regelmässigen Gang der Rechnung zu erhalten, muss man immer durch den Coefficienten derjenigen Grösse dividiren, welche in der Reihenfolge, wie sie zuerst eingeführt worden, vorangeht.* Um aus drei positiven Coefficienten α, β, γ, Grössen, von denen die erste α kleiner als die dritte γ ist, die nächst folgenden α', β', γ' zu erhalten, nimmt man

$$\alpha' = \beta - m\alpha, \quad \beta' = \gamma - n\alpha, \quad \gamma' = \alpha,$$

wo m und n resp. die ganzen Zahlen bedeuten, welche zunächst kleiner als die Brüche $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ sind. Man wird also, wenn $\alpha > \beta$, $m = 0$, $\alpha' = \beta$ erhalten. Die drei ersten Coefficienten oder die Coefficienten des gegebenen Ausdrucks kann man der Grösse nach ordnen, wie dies in den beiden gegebenen Beispielen geschehen ist.

Wendet man diese Regel auf das zweite Beispiel an, so werden die successiven Reductionsformeln die folgenden für *die allgemeine Auflösung der Gleichung* $1000000a + 1414214b + 1732051c = u$:

$a + b + c = d$	$414214b + 732051c + 1000000d = u$
$b + c + 2d = e$	$317837c + 171572d + 414214e = u$
$c + e = f$	$171572d + 96377e + 317837f = u$
$d + f = g$	$96377e + 146265f + 171572g = u$
$e + f + g = h$	$49888f + 75195g + 96377h = u$
$f + g + h = i$	$25307g + 46489h + 49888i = u$
$g + h + i = k$	$21182h + 24581i + 25307k = u$
$h + i + k = l$	$3399i + 4125k + 21182l = u$
$i + k + 6l = m$	$726k + 788l + 3399m = u$
$k + l + 4m = n$	$62l + 195m + 726n = u$
$l + 7m + 11n = p$	$61m + 44n + 62p = u$
$m + p = q$	$44n + p + 61q = u$
$n + q = r$	$p + 17q + 44r = u$
$p + 17q + 44r = u.$	

Aus diesen Formeln erhält man, wenn man von den letzten ausgeht, durch successive Substitutionen die Ausdrücke von a, b, c durch u, r, q, oder wenn man von den ersten Gleichungen ausgeht, die reciproken Ausdrücke von u, r, q durch a, b, c. Ich will hier nur die ersteren suchen. Man erhält die Coefficienten von u in den Ausdrücken von a, b, c, wenn man in den vorstehenden Formeln $u = 1$, $r = 0$, $q = 0$ setzt; die Coefficienten von r, wenn man in denselben Formeln $u = 0$, $r = 1$, $q = 0$ setzt, die Coefficienten von q, wenn man $u = 0$, $r = 0$, $q = 1$ setzt. Auf diese Weise erhält man nach und nach,

wenn $u = 1$, $r = 0$, $q = 0$,

$$p = 1,\ n = 0,\ m = -1,\ l = 8,\ k = -4,\ i = -45,\ h = 57,\ g = -16,$$
$$f = -86,\ e = 159,\ d = 70,\ c = -245,\ b = 264,\ a = 51;$$

wenn $u = 0$, $r = 1$, $q = 0$,

$$p = -44,\ n = 1,\ m = 44,\ l = -363,\ k = 188,\ i = 2034,\ h = -2585,\ g = 739,$$
$$f = 3880,\ e = -7204,\ d = -3141,\ c = 11084,\ b = -12006,\ a = -2219;$$

wenn $u = 0$, $r = 0$, $q = 1$,

$$p = -17,\ n = -1,\ m = 18,\ l = -132,\ k = 59,\ i = 751,\ h = -942,\ g = 250,$$
$$f = 1443,\ e = -2635,\ d = -1193,\ c = 4078,\ b = -4327,\ a = -944.$$

Hiernach werden die gesuchten Formeln

$$\begin{aligned} a &= 51u - 2219r - 944q \\ b &= 264u - 12006r - 4327q \\ c &= -245u + 11084r + 4078q. \end{aligned}$$

Um aus denselben die *Euler*schen Werthe

$$a = 8104,\quad b = -6889,\quad c = 946$$

abzuleiten, hat man

$$u = 0,\quad r = 24,\quad q = -65$$

zu setzen.

Um die einfachsten Formeln zu haben muss man nicht, wie im Vorhergehenden, bei der Gleichung

$$p + 17q + 44r = u$$

stehen bleiben, sondern muss noch die folgenden hinzufügen:

$$\begin{aligned} q + 2r &= s & p + 10r + 17s &= u \\ r + s &= t & p + 7s + 10t &= u \\ s + t &= v & p + 3t + 7v &= u \\ t + 2v &= w & p + v + 3w &= u. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach und nach

$$t = w - 2v, \quad s = 3v - w, \quad r = 2w - 5v, \quad q = 13v - 5w.$$

Die Substitution der Werthe von r und q in die obigen Ausdrücke von a, b, c giebt die viel einfacheren

$$a = 51u - 1177v + 282w$$
$$b = 264u + 3779v - 2377w$$
$$c = -245u - 2406v + 1778w.$$

Man erhält hieraus, wenn man $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$ setzt, die Werthe

$$a = 282, \quad b = -2377, \quad c = 1778,$$

welche kleiner als die von *Euler* gegebenen sind; diese letzteren gehen aus den vorstehenden Formeln hervor, wenn man

$$u = 0, \quad v = -10, \quad w = -13$$

setzt.

Ueber die im Vorstehenden durch ein Beispiel erläuterten Algorithmen lassen sich, wie man aus der folgenden Abhandlung ersehen wird, analoge Betrachtungen wie bei der Theorie der Kettenbrüche anstellen. Ich will mich dabei, wie in dem vorhergehenden Beispiele, auf Ausdrücke von drei Grössen beschränken, obgleich dieselben Betrachtungen ohne Schwierigkeit auf Ausdrücke von jeder Anzahl von Grössen ausgedehnt werden können.

14.

Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus *drei* vorhergehenden gebildet wird.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine*.)

Beziehungen unter den Ausdrücken, welche an die Stelle der Zähler und Nenner von Näherungsbrüchen treten.

§. 1. Es seien

$$a, \quad a_1, \quad a_2$$

unbestimmte Zahlen, dagegen

$$l, \quad m, \quad l_1, \quad m_1, \quad l_2, \quad m_2 \quad \text{etc.}$$

gegebene Grössen; ferner

$$(1.) \quad \begin{cases} a + l a_1 + m a_2 = a_3, \\ a_1 + l_1 a_2 + m_1 a_3 = a_4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_i + l_i a_{i+1} + m_i a_{i+2} = a_{i+3}, \end{cases}$$

so kann man durch successive Substitutionen sowohl a_{i+3}, a_{i+2}, a_{i+1} durch a, a_1, a_2 als auch umgekehrt a, a_1, a_2 durch a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} ausdrücken. Bei diesen successiven Substitutionen, in denen man immer jede der allgemeinen Grössen a_k entweder durch die vorhergehenden oder durch die folgenden ausdrückt, hat man niemals eine Division auszuführen, weil in der Gleichung, welche zur Elimination einer Grösse angewandt wird, diese Grösse immer den Coefficienten 1 hat. Setzt man daher

$$(2.) \quad \begin{cases} a = p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2}, \\ a_1 = p_i' a_i + q_i' a_{i+1} + r_i' a_{i+2}, \\ a_2 = p_i'' a_i + q_i'' a_{i+1} + r_i'' a_{i+2}, \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(3.) \quad \begin{cases} a_i = P_i a + P_i' a_1 + P_i'' a_2, \\ a_{i+1} = P_{i+1} a + P_{i+1}' a_1 + P_{i+1}'' a_2, \\ a_{i+2} = P_{i+2} a + P_{i+2}' a_1 + P_{i+2}'' a_2, \end{cases}$$

so werden in beiden Systemen Gleichungen die Coefficienten ganze rationale Functionen der Grössen l_i und m_i, und es werden daher, wenn l_i und m_i ganze Zahlen sind, auch die Coefficienten in (2.) und (3.) ganze Zahlen. Hieraus folgt nach dem im §. 1 der vorigen Abhandlung bewiesenen Satze, dass in beiden Systemen Gleichungen die Determinante $= \pm 1$ sein muss, was natürlich auch allgemein Statt hat, wenn für l_i und m_i *beliebige* Zahlen gesetzt werden. Denn keine ganze rationale Function mehrerer Grössen kann für unendlich viele Systeme von Werthen dieser Grössen einen bestimmten Werth annehmen, wenn sie sich nicht identisch auf diesen Werth reducirt.

Fügt man zu (3.) die Gleichung

$$a_{i+3} = P_{i+3}a + P'_{i+3}a_1 + P''_{i+3}a_2$$

hinzu, und substituirt die Werthe von a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3} in die zwischen diesen vier Grössen Statt findende Gleichung

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i,$$

so erhält man eine lineare Gleichung zwischen den Grössen a, a_1, a_2, die identisch sein muss, da a, a_1, a_2 ganz beliebige Grössen bedeuten. Es können daher die Coefficienten von a, a_1, a_2 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich gesetzt werden, was darauf hinauskommt, dass man von den Grössen a, a_1, a_2 zwei $= 0$ und die dritte $= 1$ setzt. Man erhält hieraus die folgenden Gleichungen, welche zeigen, wie man jede der Grössen P_i, P'_i, P''_i aus drei vorhergehenden oder drei folgenden bilden kann:

$$(4.) \quad \begin{cases} P_{i+3} = m_i P_{i+2} + l_i P_{i+1} + P_i, \\ P'_{i+3} = m_i P'_{i+2} + l_i P'_{i+1} + P'_i, \\ P''_{i+3} = m_i P''_{i+2} + l_i P''_{i+1} + P''_i. \end{cases}$$

Setzt man ferner $i+1$ in (2.) für i, und substituirt für a_{i+3} seinen Werth

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i,$$

so erhält man für jede der Grössen a, a_1, a_2 einen doppelten Ausdruck durch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} und daher drei Gleichungen zwischen a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, welche identisch sein müssen, da auch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} beliebige Grössen sein können. Setzt man die beiden Ausdrücke von a einander gleich, so erhält man

$$p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2} = r_{i+1} a_i + (p_{i+1} + l_i r_{i+1}) a_{i+1} + (q_{i+1} + m_i r_{i+1}) a_{i+2}$$

und daher

$$(5.) \quad p_i = r_{i+1}, \quad q_i = p_{i+1} + l_i r_{i+1}, \quad r_i = q_{i+1} + m_i r_{i+1}$$

oder umgekehrt

$$(6.) \quad p_{i+1} = q_i - l_i p_i, \quad q_{i+1} = r_i - m_i p_i, \quad r_{i+1} = p_i.$$

Diese Gleichungen zeigen, wie man aus den Grössen p_i, q_i, r_i die nächst folgenden oder nächst vorhergehenden bilden kann. Man hat ferner aus (6.)

$$(7.) \qquad q_{i+1} = p_{i-1} - m_i p_i = p_{i+2} + l_{i+1} p_{i+1}$$

und daher

$$(8.) \qquad p_{i+2} = p_{i-1} - m_i p_i - l_{i+1} p_{i+1}.$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man jede Grösse p_i aus den drei vorhergehenden oder drei folgenden bilden; die Grössen q_i und r_i werden dann aus den Grössen p_i mittelst der Gleichungen (7.) und der Gleichung $r_i = p_{i-1}$ erhalten. Ganz dieselben Relationen erhält man zwischen den analogen, mit einem oder zwei oberen Accenten versehenen Grössen.

§. 2. Man beweist leicht aus den allgemeinen Eigenschaften der Determinanten, dass die Determinante der Gleichungen

$$(9.) \qquad \begin{cases} a &= p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2}, \\ a_1 &= p_i' a_i + q_i' a_{i+1} + r_i' a_{i+2}, \\ a_2 &= p_i'' a_i + q_i'' a_{i+1} + r_i'' a_{i+2} \end{cases}$$

unverändert bleibt*), wenn man den Index i um eine Einheit vermehrt oder der Determinante der Gleichungen

$$(10.) \qquad \begin{cases} a &= p_{i+1} a_{i+1} + q_{i+1} a_{i+2} + r_{i+1} a_{i+3}, \\ a_1 &= p_{i+1}' a_{i+1} + q_{i+1}' a_{i+2} + r_{i+1}' a_{i+3}, \\ a_2 &= p_{i+1}'' a_{i+1} + q_{i+1}'' a_{i+2} + r_{i+1}'' a_{i+3} \end{cases}$$

gleich wird. Um die Determinante vollkommen zu bestimmen**), will ich annehmen, dass immer das Product der Coefficienten, welche in derjenigen Diagonale sich befinden, die von oben links nach unten rechts sich erstreckt, das positive Zeichen haben soll. Eine Eigenschaft der Determinante besteht darin, dass sie (auch in Bezug auf das Zeichen) unverändert bleibt, wenn man die Coefficienten einer Vertikalreihe mit demselben Factor multiplicirt zu den Coefficienten einer anderen Vertikalreihe hinzufügt. Wenn man daher in (10.) die Coefficienten der dritten Vertikalreihe, respective mit l_i und m_i multiplicirt, zu den Coefficienten der ersten und zweiten Vertikalreihe addirt, so

*) Der Beweis wird hier vollständig nach dem Manuskripte mitgetheilt. *Jacobi's*, des Schriftstellers und *Lehrers* Verdienst ist es, dass ein heutiger Autor Beweise dieses und ähnlicher Sätze über Determinanten übergehen darf. *H.*

**) Dass ihr Quadrat die Einheit ist, weiss man bereits. *H.*

bleibt die Determinante unverändert. Diese Veränderung der Coefficienten wird auch erhalten, wenn man für a_{i+3} seinen Werth

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i$$

substituirt. Die Relationen zwischen den Coefficienten, welche sich auf den Index i, und den Coefficienten, welche sich auf den Index $i+1$ beziehen, sind aber so bestimmt worden, dass durch die Substitution dieses Werthes von a_{i+3} die Gleichungen (10.) sich in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2} + p_i a_i, \\ a_1 &= q_i' a_{i+1} + r_i' a_{i+2} + p_i' a_i, \\ a_2 &= q_i'' a_{i+1} + r_i'' a_{i+2} + p_i'' a_i \end{aligned}$$

verwandeln. Diese Gleichungen kommen mit (9.) überein, nur dass die Vertikalreihen alle eine Stelle nach links gerückt sind, und die erste die letzte geworden ist. Hierdurch bleibt das Zeichen der Determinante ungeändert oder geht in das entgegengesetzte über, je nachdem die Zahl der Gleichungen ungrade oder grade ist. Die Determinante, welche in der Theorie der Kettenbrüche, wenn i um eine Einheit wächst, immer das Zeichen ändert, wird also in den hier betrachteten Algorithmen unverändert bleiben.

Dass auch die Determinante der Gleichungen (3.) unverändert bleibt, wenn man in den Coefficienten i um 1 vermehrt, kann man folgendermassen beweisen: Wenn man zu einer Horizontalreihe der Coefficienten die übrigen Horizontalreihen, mit verschiedenen Factoren multiplicirt, hinzufügt, so bleibt die Determinante auch in Bezug auf das Zeichen unverändert. Wenn man daher in den Gleichungen

$$(11.) \quad \begin{cases} a_i &= P_i a + P_i' a_1 + P_i'' a_2, \\ a_{i+1} &= P_{i+1} a + P_{i+1}' a_1 + P_{i+1}'' a_2, \\ a_{i+2} &= P_{i+2} a + P_{i+2}' a_1 + P_{i+2}'' a_2 \end{cases}$$

die zweite Horizontalreihe mit l_i und die dritte mit m_i multiplicirt zur ersten Horizontalreihe hinzufügt, oder was dasselbe ist, wenn man statt der ersten Gleichung diejenige setzt, welche den Werth von

$$a_{i+3} = m_i a_{i+2} + l_i a_{i+1} + a_i$$

giebt, so bleibt die Determinante ungeändert. Es bleibt also die Determinante ungeändert, wenn man die erste Gleichung durch die Gleichung

$$a_{i+3} = P_{i+3} a + P_{i+3}' a_1 + P_{i+3}'' a_2$$

ersetzt, oder was dasselbe ist, wenn man $i+1$ in (11.) für i setzt, und die

Gleichungen alle um eine Stelle herunterrückt, und die letzte zur ersten macht. Durch dieses Verrücken der Gleichungen bleibt aber die Determinante ungeändert oder ändert das Zeichen, je nachdem die Anzahl der Gleichungen ungrade oder grade ist. Sie wird also in der Theorie der Kettenbrüche, in welcher diese Anzahl 2 beträgt, so oft i um eine Einheit wächst das Zeichen ändern, und in der hier auseinandergesetzten Theorie unverändert bleiben. Man sieht, wie diese Beweise mit Hülfe der allgemeinen Sätze von den Determinanten ohne die geringste Aenderung auch für die allgemeineren Algorithmen gelten, in welchen jede Grösse, statt aus drei, aus n vorhergehenden oder folgenden bestimmt wird.

§. 3. Ich will jetzt die Coefficienten der Gleichungen (9.) und (11.) für die ersten Werthe von i angeben.

Setzt man $i = 0$ in (9.), so müssen sich die Ausdrücke rechts identisch auf a, a_1, a_2 reduciren, wenn man a für a_0 setzt. Es wird demnach

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & q_0 &= 0, & r_0 &= 0, \\ p_0' &= 0, & q_0' &= 1, & r_0' &= 0, \\ p_0'' &= 0, & q_0'' &= 0, & r_0'' &= 1. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6.)

$$p_{i+1} = q_i - l_i p_i, \quad q_{i+1} = r_i - m_i p_i, \quad r_{i+1} = p_i$$

und der ähnlichen, welche für die mit einem oder zwei Accenten versehenen Grössen Statt finden, folgt hieraus

$$\begin{aligned} p_1 &= -l_0, & q_1 &= -m_0, & r_1 &= 1, \\ p_1' &= 1, & q_1' &= 0, & r_1' &= 0, \\ p_1'' &= 0, & q_1'' &= 1, & r_1'' &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus zufolge derselben Gleichungen

$$\begin{aligned} p_2 &= -m_0 + l_0 l_1, & q_2 &= 1 + l_0 m_1, & r_2 &= -l_0, \\ p_2' &= -l_1, & q_2' &= -m_1, & r_2' &= 1, \\ p_2'' &= 1, & q_2'' &= 0, & r_2'' &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Werthen leitet man nach und nach die Werthe von p_k, p_k', p_k'' mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} p_{i+3} &= -l_{i+2} p_{i+2} - m_{i+1} p_{i+1} + p_i, \\ p_{i+3}' &= -l_{i+2} p_{i+2}' - m_{i+1} p_{i+1}' + p_i', \\ p_{i+3}'' &= -l_{i+2} p_{i+2}'' - m_{i+1} p_{i+1}'' + p_i'' \end{aligned}$$

ab, aus welchen sich dann die übrigen Grössen mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} q_k &= p_{k-2} - m_{k-1} p_{k-1}, & r_k &= p_{k-1}, \\ q'_k &= p'_{k-2} - m_{k-1} p'_{k-1}, & r'_k &= p'_{k-1}, \\ q''_k &= p''_{k-2} - m_{k-1} p''_{k-1}, & r''_k &= p''_{k-1} \end{aligned}$$

ergeben. Man erhält hieraus

$$\begin{aligned} p_3 &= -l_0 l_1 l_2 + m_0 l_2 + l_0 m_1 + 1, \\ p'_3 &= l_1 l_2 - m_1, \\ p''_3 &= -l_2, \\ p_4 &= l_0 l_1 l_2 l_3 - m_0 l_2 l_3 - l_0 l_3 m_1 - l_0 l_1 m_2 + m_0 m_2 - l_3 - l_0, \\ p'_4 &= -l_1 l_2 l_3 + m_1 l_3 + l_1 m_2 + 1, \\ p''_4 &= l_2 l_3 - m_2, \end{aligned}$$

u. s. w.

§. 4. Man sieht aus den vorstehenden Beispielen, *dass die Determinante der Gleichungen* (9.) *für* $i = 0, 1, 2$ *den Werth* 1 *annimmt, welchen sie daher dem Obigen zufolge für jeden Werth von* i *unverändert behält.*

Setzt man $i = 0$ in (11.), so müssen sich die Ausdrücke rechts identisch auf a, a_1, a_2 reduciren. Man erhält daher

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P'_0 &= 0, & P''_0 &= 0, \\ P_1 &= 0, & P'_1 &= 1, & P''_1 &= 0, \\ P_2 &= 0, & P'_2 &= 0, & P''_2 &= 1, \end{aligned}$$

woraus sich mittelst der Gleichungen (4.)

$$P_{i+3} = m_i P_{i+2} + l_i P_{i+1} + P_i, \quad \text{etc.}$$

die folgenden Werthe ergeben:

$$\begin{aligned} P_3 &= 1, & P'_3 &= l_0, & P''_3 &= m_0, \\ P_4 &= m_1, & P'_4 &= l_0 m_1 + 1, & P''_4 &= m_0 m_1 + l_1, \\ P_5 &= m_1 m_2 + l_2, & P'_5 &= l_0 m_1 m_2 + l_0 l_2 + m_2, & P''_5 &= m_0 m_1 m_2 + l_1 m_2 + l_2 m_0 + 1. \end{aligned}$$

u. s. w.

Man ersieht aus den vorstehenden Werthen, *dass die Determinante der Gleichungen* (3.) *für* $i = 0, 1, 2, 3$, *den Werth* $+1$ *erhält, welchen Werth sie daher dem Obigen zufolge unverändert für jeden Werth von* i *behalten muss.* Man kann auf diese Weise aus den dem Index 0 entsprechenden Werthen auch das Zeichen der Determinante bestimmen, welches die angestellte allgemeine Betrachtung der vorhergehenden Abhandlung unbestimmt lassen

musste, da sie nur den Satz ergab, dass wenn die Coefficienten zweier reciproken Systeme Gleichungen ganze rationale Functionen derselben Grössen sind, welche ganze Zahlen zu Coefficienten haben, die Determinanten dieser Gleichungen den Werth ± 1 haben müssen.

§. 5. Aus der Bildungsweise der hier betrachteten Grössen geht hervor, dass es verstattet ist, in den Gleichungen (9.) und (11.) die Indices von a, a_1, a_2 um eine beliebige Zahl k zu erhöhen, wenn man in den Coefficienten dieser Gleichungen den Index i um k erniedrigt, und hierauf in ihren Ausdrücken durch die Grössen l und m die Indices der letzteren sämmtlich um k erhöht. Wenn man daher durch das Einschliessen in eine Klammer mit unten beigefügtem k andeutet, dass in den aus den Grössen l und m zusammengesetzten Ausdrücken die Indices dieser Grössen sämmtlich um dieselbe Zahl k erhöht werden sollen, so hat man aus (9.) und (11.)

$$\begin{aligned} a_k &= (p_{i-k})_k a_i + (q_{i-k})_k a_{i+1} + (r_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_{k+1} &= (p'_{i-k})_k a_i + (q'_{i-k})_k a_{i+1} + (r'_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_{k+2} &= (p''_{i-k})_k a_i + (q''_{i-k})_k a_{i+1} + (r''_{i-k})_k a_{i+2}, \\ a_i &= (P_{i-k})_k a_k + (P'_{i-k})_k a_{k+1} + (P''_{i-k})_k a_{k+2}. \end{aligned}$$

Substituirt man die vorstehenden Ausdrücke von a_k, a_{k+1}, a_{k+2} in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= p_k a_k + q_k a_{k+1} + r_k a_{k+2}, \\ a_1 &= p'_k a_k + q'_k a_{k+1} + r'_k a_{k+2}, \\ a_2 &= p''_k a_k + q''_k a_{k+1} + r''_k a_{k+2}, \end{aligned}$$

so giebt die Vergleichung mit (9.) selbst

$$(9^*.) \quad \begin{cases} p_k (p_{i-k})_k + q_k (p'_{i-k})_k + r_k (p''_{i-k})_k = p_i, \\ p'_k (p_{i-k})_k + q'_k (p'_{i-k})_k + r'_k (p''_{i-k})_k = p'_i, \\ p''_k (p_{i-k})_k + q''_k (p'_{i-k})_k + r''_k (p''_{i-k})_k = p''_i, \end{cases}$$

und ähnliche Formeln, welche aus diesen erhalten werden, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen und unter der Klammer q für p setzt.

Ebenso erhält man aus dem obigen Ausdruck von a_i, wenn man darin die Gleichung

$$a_k = P_k a + P'_k a_1 + P''_k a_2$$

substituirt, und die Vergleichung mit (11.) selbst anstellt

$$(10^*.) \quad \begin{cases} P_i = P_k (P_{i-k})_k + P_{k+1} (P'_{i-k})_k + P_{k+2} (P''_{i-k})_k, \\ P'_i = P'_k (P_{i-k})_k + P'_{k+1} (P'_{i-k})_k + P'_{k+2} (P''_{i-k})_k, \\ P''_i = P''_k (P_{i-k})_k + P''_{k+1} (P'_{i-k})_k + P''_{k+2} (P''_{i-k})_k. \end{cases}$$

Setzt man $k=1$, so folgt hieraus

$$p_i=-l_0(p_{i-1})_1-m_0(p'_{i-1})_1+(p''_{i-1})_1;\quad p'_i=(p_{i-1})_1;\quad p''_i=(p'_{i-1})_1,$$
$$P_i=(P''_{i-1})_1;\quad P'_i=(P_{i-1})_1+l_0(P''_{i-1})_1;\quad P''_i=(P'_{i-1})_1+m_0(P''_{i-1})_1,$$

woraus auch

$$p_i=-l_0(p_{i-1})_1-m_0(p_{i-2})_2+(p_{i-3})_3;\quad p'_i=(p_{i-1})_1;\quad p''_i=(p_{i-2})_2,$$
$$P_i=(P''_{i-1})_1;\quad P'_i=(P''_{i-2})_2+l_0(P''_{i-1})_1;\quad P''_i=(P''_{i-3})_3+l_1(P''_{i-2})_2+m_0(P''_{i-1})_1.$$

Dieser Gleichungen kann man sich eben so gut, wie der Gleichungen (4.) und (6.) zur algebraischen Bildung der Grössen p und P bedienen, und die Uebereinstimmung beider Bildungsweisen an den im Vorstehenden gegebenen Werthen dieser Grössen prüfen. Wenn man $k=i-1$ in (9*.) und (10*.) setzt, erhält man (3.) und (4.).

Wenn die Werthe der Grössen l und m periodisch wiederkehren, so dass sie unverändert bleiben wenn man ihre Indices um eine Zahl k vermehrt, so wird in den Formeln (9*.) und (10*.)

$$(p_{i-k})_k=p_{i-k},\quad (p'_{i-k})_k=p'_{i-k},\quad (p''_{i-k})_k=p''_{i-k},$$
$$(P_{i-k})_k=P_{i-k},\quad (P'_{i-k})_k=P'_{i-k},\quad (P''_{i-k})_k=P''_{i-k}.$$

Setzt man in diesem Falle für i nach und nach Vielfache von k, so kann man mittelst (9*.) und (10*.) aus den Grössen p und P, in welchen der Index die Werthe k, $k+1$, $k+2$ annimmt, die Werthe derjenigen Grössen p und P finden, deren Index ein Vielfaches von k ist.

§. 6. Die Grössen l und m sind im Vorhergehenden ganz allgemeine Grössen; ich will annehmen, dass sie ganze positive Zahlen sind, welche folgendermassen bestimmt werden:

Es seien u_0, v_0, w_0 drei gegebene positive Grössen, deren grösste w_0 ist: aus ihnen bestimme man l_0 und m_0 als die den Brüchen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ nächst kleineren ganzen Zahlen. Setzt man

$$v_0-l_0u_0=u_1,\quad w_0-m_0u_0=v_1,\quad u_0=w_1,$$

so bestimme man ähnlich l_1 und m_1 als die den Brüchen $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ nächst kleineren ganzen Zahlen. Man setzt wieder

$$v_1-l_1u_1=u_2,\quad w_1-m_1u_1=v_2,\quad u_1=w_2.$$

Allgemein bestimme man aus u_i, v_i, w_i die Grössen l_i und m_i als die den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ nächst kleineren ganzen Zahlen, und mit Hülfe derselben

u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} durch die Gleichungen

$$(12.) \qquad v_i - l_i u_i = u_{i+1}, \quad w_i - m_i u_i = v_{i+1}, \quad u_i = w_{i+1}.$$

Wenn $u_i > v_i$, so wird

$$l_i = 0, \quad v_i = u_{i+1}.$$

Es folgt hieraus, dass u_i, v_i, w_i positive Grössen von der Beschaffenheit sind, dass

$$u_i < u_{i-1}, \quad v_i < u_{i-1};$$

es wird daher auch, da $u_{i-1} = w_i$,

$$w_i > u_i, \qquad w_i > v_i$$

und mithin w_i immer die grösste der drei Grössen u_i, v_i, w_i.

Die Grössen u_i und w_i nehmen mit wachsendem i fortwährend ab. Aus (12.) folgt

$$(13.) \qquad u_{i+2} = u_{i-1} - m_i u_i - l_{i+1} u_{i+1};$$

es wird daher

$$u_{i+2} < \frac{u_{i-1}}{1 + m_i + l_{i+1}},$$

also gewiss $u_{i+2} < \frac{1}{2} u_{i-1}$. Die Grössen u_i können daher Null werden, oder der Null so nahe kommen, dass der Unterschied kleiner als jede gegebene noch so kleine Zahl wird.

Die Grösse v_i wird aus den Grössen u_i mittelst der Gleichungen

$$v_i = l_i u_i + u_{i+1} = u_{i-2} - m_{i-1} u_{i-1}$$

bestimmt. Diese Grösse ist immer kleiner als u_{i-1}; wenn sie auch $< u_i$, so kann der Fall eintreten, dass $v_{i+1} > v_i$ wird. Es ist dann aber immer $v_{i+2} < v_i$, da $v_{i+2} < u_{i+1}$ und $u_{i+1} = v_i$. Ferner wird in diesem Falle

$$v_{i+3} = u_{i+1} - m_{i+2} u_{i+2} = v_i - m_{i+2} u_{i+2},$$

woraus

$$v_{i+3} < \frac{v_i}{1 + m_{i+2}},$$

also gewiss $v_{i+3} < \frac{1}{2} v_i$ folgt. Aus $v_i < u_i$, $v_{i+1} > v_i$ folgt auch $v_{i+1} > u_{i+1}$, da $u_{i+1} = v_i$, wenn $v_i < u_i$; dagegen wird aus $v_i < u_i$, $v_{i+1} < v_i$ wiederum $v_{i+1} < u_{i+1}$ folgen, so dass es möglich ist, dass die Grössen v_i immer kleiner als u_i bleiben, und daher die Zahlen l_i sämmtlich verschwinden. Ich bemerke noch, dass immer $m_i \geqq l_i$, dass ferner nur dann $l_i = 0$ werden kann, wenn $m_{i-1} > l_{i-1}$, niemals aber wenn $m_{i-1} = l_{i-1}$.

Setzt man

$$(14.) \qquad U = u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2,$$

so erhält man durch fortgesetzte Substitution der Gleichungen

$$a_i + l_i a_{i+1} + m_i a_{i+2} = a_{i+3},$$

$$v_i - l_i u_i = u_{i+1}, \quad w_i - m_i u_i = v_{i+1}, \quad u_i = w_{i+1}$$

nach und nach

$$\begin{aligned} U &= u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2 \\ &= u_1 a_1 + v_1 a_2 + w_1 a_3 \\ &= u_2 a_2 + v_2 a_3 + w_2 a_4 \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und allgemein

$$(15.) \qquad U = u_i a_i + v_i a_{i+1} + w_i a_{i+2}.$$

Substituirt man in der Gleichung

$$u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2 = u_i a_i + v_i a_{i+1} + w_i a_{i+2}$$

für a, a_1, a_2 die Ausdrücke (9.), und setzt die Coefficienten von a_i, a_{i+1}, a_{i+2} auf beiden Seiten der so transformirten Gleichung respective einander gleich, oder für a_i, a_{i+1}, a_{i+2} die Ausdrücke (11.), und setzt respective die Coefficienten von a, a_1, a_2 einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$(16.) \qquad \begin{cases} u_i = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0, \\ v_i = q_i u_0 + q_i' v_0 + q_i'' w_0, \\ w_i = r_i u_0 + r_i' v_0 + r_i'' w_0, \end{cases}$$

und die reciproken

$$(17.) \qquad \begin{cases} u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i, \\ v_0 = P_i' u_i + P_{i+1}' v_i + P_{i+2}' w_i, \\ w_0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + P_{i+2}'' w_i. \end{cases}$$

Alle in den letzteren Gleichungen vorkommenden Grössen sind positiv; man hat daher, da $w_i = u_{i-1}$,

$$(18.) \qquad \frac{u_{i-1}}{u_0} < \frac{1}{P_{i+2}}, \quad \frac{u_{i-1}}{v_0} < \frac{1}{P_{i+2}'}, \quad \frac{u_{i-1}}{w_0} < \frac{1}{P_{i+2}''},$$

oder auch, wenn man i für $i-1$ setzt, und die erste der Gleichungen (16.) anwendet,

$$(19.) \qquad \begin{cases} p_i + p_i' \frac{v_0}{u_0} + p_i'' \frac{w_0}{u_0} < \frac{1}{P_{i+3}}, \\ p_i \frac{u_0}{v_0} + p_i' + p_i'' \frac{w_0}{v_0} < \frac{1}{P_{i+3}'}, \\ p_i \frac{u_0}{w_0} + p_i' \frac{v_0}{w_0} + p_i'' < \frac{1}{P_{i+3}''}. \end{cases}$$

Da die Determinanten der Gleichungen (16.) und (17.) gleich $+1$ sind, so hat man die Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} q_i'r_i''-q_i''r_i'=P_i, & q_i''r_i-q_ir_i''=P_i', & q_ir_i'-q_i'r_i=P_i'', \\ r_i'p_i''-r_i''p_i'=P_{i+1}, & r_i''p_i-r_ip_i''=P_{i+1}', & r_ip_i'-r_i'p_i=P_{i+1}'', \\ p_i'q_i''-p_i''q_i'=P_{i+2}, & p_i''q_i-p_iq_i''=P_{i+2}', & p_iq_i'-p_i'q_i=P_{i+2}''. \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} P_{i+1}'P_{i+2}''-P_{i+2}'P_{i+1}''=p_i, & P_{i+1}''P_{i+2}-P_{i+2}''P_{i+1}=p_i', & P_{i+1}P_{i+2}'-P_{i+2}P_{i+1}=p_i'', \\ P_{i+2}'P_i''-P_i'P_{i+2}''=q_i, & P_{i+2}''P_i-P_i''P_{i+2}=q_i', & P_{i+2}P_i'-P_iP_{i+2}'=q_i'', \\ P_i'P_{i+1}''-P_{i+1}'P_i''=r_i, & P_i''P_{i+1}-P_{i+1}''P_i=r_i', & P_iP_{i+1}'-P_{i+1}P_i'=r_i''. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (16.) und (17.) folgt ferner

$$(22.)\quad \begin{cases} P_ip_i+P_i'p_i'+P_i''p_i''=1, \\ P_{i+1}p_i+P_{i+1}'p_i'+P_{i+1}''p_i''=0, \\ P_{i+2}p_i+P_{i+2}'p_i'+P_{i+2}''p_i''=0, \end{cases}$$

zu denen man noch die folgenden hinzufügen kann

$$(23.)\quad \begin{cases} P_{i+3}p_i+P_{i+3}'p_i'+P_{i+3}''p_i''=1, \\ P_{i+4}p_i+P_{i+4}'p_i'+P_{i+4}''p''=m_{i+1}, \\ P_{i-1}p_i+P_{i-1}'p_i'+P_{i-1}''p_i''=-l_{i-1}, \end{cases}$$

die sich aus (22.) mittelst der Gleichung

$$P_{i+3}=m_iP_{i+2}+l_iP_{i+1}+P_i$$

ergeben.

Aus (17.) und (21.) folgt

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{v_0}{u_0}=\dfrac{P_{i+2}'}{P_{i+2}}+\dfrac{q_i''u_i-p_i''v_i}{u_0P_{i+2}}, \\ \dfrac{w_0}{u_0}=\dfrac{P_{i+2}''}{P_{i+2}}-\dfrac{q_i'u_i-p_i'v_i}{u_0P_{i+2}}. \end{cases}$$

Es werden daher die Brüche

$$\frac{P_{i+2}'}{P_{i+2}},\quad \frac{P_{i+2}''}{P_{i+2}}$$

zwei *mit demselben Nenner* behaftete Näherungswerthe *) für die Grössen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$.

*) Das Gesetz, nach welchem die Annäherung erfolgt, ist in dem mir vorliegenden Manuscripte nicht weiter untersucht. H.

Entwickelung der reellen Wurzel einer cubischen Gleichung durch kettenbruchähnliche periodische Algorithmen.

§. 7. Ich will im Folgenden für u_0 eine ganze Zahl, und für v_0 und w_0 Ausdrücke von der Form

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

setzen *), in welchen α, β, γ ganze Zahlen sind, und x eine reelle Wurzel einer irreductibeln kubischen Gleichung bezeichnet, in welcher der Coefficient von x^3 gleich 1 und die Coefficienten der drei übrigen Glieder reelle ganze Zahlen sind. Ein Ausdruck dieser Art kann nicht verschwinden, ohne dass α, β, γ selbst Null sind; hieraus folgt unmittelbar, dass eine Grösse sich nur auf eine einzige Weise durch die Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ darstellen lässt, also nicht auch gleich $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2$ wird, wenn α', β', γ' gleichfalls ganze Zahlen bedeuten, ohne dass $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ sind. Zugleich werde ich aber den Grössen u_i, v_i, w_i eine modificirte Bedeutung geben.

Es soll nämlich im Folgenden immer u_i eine *ganze Zahl* sein, während v_i und w_i Ausdrücke von derselben Form wie v_0 und w_0 bedeuten. Solchen Ausdruck $\alpha+\beta x+\gamma x^2$, in welchem α, β, γ ganze Zahlen sind, werde ich hier der Kürze halber einen *complexen Ausdruck*, und α, β, γ die Coefficienten desselben nennen, und unter *dem Theiler* desselben die grösste ganze Zahl verstehn, welche zugleich alle drei Zahlen α, β, γ theilt.

Es sollen ferner, wie früher, l_i und m_i die den Brüchen

$$\frac{v_i}{u_i}, \quad \frac{w_i}{u_i}$$

nächst kleineren ganzen Zahlen bedeuten, so dass, wenn u_i, v_i, w_i positive Zahlen sind, auch die Grössen

$$v_i-l_iu_i, \quad w_i-m_iu_i, \quad u_i$$

positive Grössen werden. Diese letzteren Grössen selbst sollen aber nicht mehr, wie im Vorhergehenden, mit u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1} bezeichnet werden, sondern *ihre Producte durch den einfachsten complexen Factor, welcher* $v_i-l_iu_i$ *zu*

*) An dieser Stelle betrachtet *Jacobi* allerdings nur solche Ausdrücke von der vorstehenden Form, in welchen x die reelle dritte Wurzel einer ganzen Zahl n ist. Dem Manuscripte hat er aber, nachträglich wie es scheint, mehrere lose Blätter hinzugefügt, auf denen x die allgemeinere Bedeutung erhält, die ich ihm hier gleich von vorn herein gebe. Ich erlaubte mir diese Aenderung, da sie nur ganz geringe Modificationen erforderte. *H.*

einer ganzen Zahl macht, dividirt durch die grösste ganze Zahl, welche alle diese Producte theilt. Nennt man v_i' und w_i', v_i'' und w_i'' die Grössen, welche aus v_i und w_i entstehen, wenn man für x die beiden andern Wurzeln x' und x'' der kubischen Gleichung setzt, so wird dieser Factor, den ich mit f_i bezeichnen werde,

$$f_i = \frac{(v_i' - l_i u_i)(v_i'' - l_i u_i)}{g_i},$$

wenn g_i die grösste ganze Zahl ist, welche die drei Coefficienten des complexen Ausdrucks

$$v_i' v_i'' - l_i u_i (v_i' + v_i'') + l_i^2 u_i^2 = (v_i' - l_i u_i)(v_i'' - l_i u_i)$$

theilt. Bezeichnet man hierauf mit k_i die grösste ganze Zahl, welche die drei Ausdrücke

$$f_i(v_i - l_i u_i), \quad f_i(w_i - l_i u_i), \quad f_i u_i$$

theilt, so wird

$$k_i u_{i+1} = f_i(v_i - l_i u_i), \quad k_i v_{i+1} = f_i(w_i - m_i u_i), \quad k_i w_{i+1} = f_i u_i.$$

Hieraus folgt, dass wenn man mit F_i das Product

$$\frac{f_0}{k_0} \frac{f_1}{k_1} \cdots \frac{f_{i-1}}{k_{i-1}} = F_i$$

bezeichnet, die früher mit u_i, v_i, w_i bezeichneten Grössen jetzt durch

$$\frac{u_i}{F_i}, \quad \frac{v_i}{F_i}, \quad \frac{w_i}{F_i}$$

ersetzt werden müssen. Es bleiben daher die Verhältnisse von u_i, v_i, w_i und daher die Quotienten l_i und m_i, und daher auch alle Grössen

$$a_i, \quad p_i, \quad p_i', \quad p_i'', \quad P_i, \quad P_i', \quad P_i''$$

unverändert.

Es folgt hieraus, dass man in allen im Vorhergehenden aufgestellten Formeln keine weitere Veränderung zu treffen braucht, als dass man überall $\frac{u_i}{F_i}$, $\frac{v_i}{F_i}$, $\frac{w_i}{F_i}$ für u_i, v_i, w_i setzt. So erhält man, wenn man

$$U_0 = u_0 a + v_0 a_1 + w_0 a_2$$
$$U_i = u_i a_i + v_i a_{i+1} + w_i a_{i+2}$$

setzt, die Gleichung

$$U_i = F_i U_0.$$

Man wird aus (16.) und (17.) die Gleichungen

$$(25.)\quad \begin{cases} \frac{u_i}{F_i} = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0, \\ \frac{v_i}{F_i} = q_i u_0 + q_i' v_0 + q_i'' w_0, \\ \frac{w_i}{F_i} = r_i u_0 + r_i' v_0 + r_i'' w_0, \end{cases}$$

$$(26.)\quad \begin{cases} F_i u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i, \\ F_i v_0 = P_i' u_i + P_{i+1}' v_i + P_{i+2}' w_i, \\ F_i w_0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + P_{i+2}'' w_i \end{cases}$$

erhalten.

§. 8. Die Factoren f_i sind ihrer Natur nach immer positive Grössen; es werden daher auch F_i und u_i, v_i, w_i immer positive Grössen sein, wenn man für u_0, v_0, w_0 solche angenommen hat; es wird ferner, wie früher, w_i die grösste von den drei Grössen u_i, v_i, w_i sein, wenn man, wie früher, für w_0 die grösste der Grössen u_0, v_0, w_0 nimmt.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{F_i u_0}{w_i} > P_{i+2}, \quad \frac{F_i v_0}{w_i} > P_{i+2}', \quad \frac{F_i w_0}{w_i} > P_{i+2}'',$$

nnd daher

$$\frac{w_i}{F_i u_0} < \frac{1}{P_{i+2}}, \quad \frac{w_i}{F_i v_0} < \frac{1}{P_{i+2}'}, \quad \frac{w_i}{F_i w_0} < \frac{1}{P_{i+2}''}$$

woraus folgt, *dass die complexe Grösse*

$$p_{i-1} u_0 + p_{i-1}' v_0 + p_{i-1}'' w_0 = \frac{w_i}{F_i}$$

kleiner als die Grössen

$$\frac{u_0}{P_{i+2}}, \quad \frac{v_0}{P_{i+2}'}, \quad \frac{w_0}{P_{i+2}''}$$

wird. Es wird daher die complexe Grösse mit wachsendem i kleiner als jede gegebene noch so kleine Grösse.

Wenn man durch successive Ausführung der Multiplication das Product

$$\frac{f_0}{k_0} \frac{f_1}{k_1} \cdots \frac{f_{i-1}}{k_{i-1}} = F_i$$

bildet, so müssen sich, wenn $u_0 = 1$ *), die Nenner nach jeder Multiplication

*) D. h. wenn die Grössen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$, welche entwickelt werden, complexe Zahlen sind, nicht solche Zahlen *noch dividirt* durch eine ganze Zahl. *H.*

fortheben. Denn man sieht aus der ersten Gleichung (26.), dass F_i eine complexe Zahl ist, oder ein Ausdruck, in dem die Potenzen der Wurzelgrösse mit ganzen Zahlen multiplicirt sind, und auch die hinzukommende Constante eine ganze Zahl ist. Da

$$k_i w_{i+1} = u_i f_i,$$

und f_i durch keine ganze Zahl theilbar ist, so folgt, *dass k_i immer ein Theiler von u_i ist.* Wenn daher $u_0 = 1$, so ist auch $k_0 = 1$. Wenn u_0 von 1 verschieden ist, so folgt aus derselben Gleichung (26.), dass der complexe Ausdruck F_i niemals einen andern Nenner als u_0 erhalten kann.

Aus der Gleichung

$$f_i(v_i - l_i u_i) = k_i u_{i+1} \quad \text{oder} \quad \frac{k_i}{f_i} = \frac{v_i - l_i u_i}{u_{i+1}}$$

folgt

$$(27.) \qquad \frac{1}{F_i} = \frac{(v_0 - l_0 u_0)(v_1 - l_1 u_1)\dots(v_{i-1} - l_{i-1} u_{i-1})}{u_1 u_2 \dots u_i},$$

durch welche Gleichung man den inversen Werth von F_i nach und nach bequem als complexen Ausdruck darstellt.

§. 9. *Setzen wir den Fall, dass gleichzeitig*

$$u_i = u_0, \qquad v_i = v_0, \qquad w_i = w_0,$$

so wird die Norm von F_i, d. h. das Product aller Ausdrücke, welche aus F_i erhalten werden, wenn man darin der Wurzelgrösse x ihre verschiedenen Werthe giebt, der Einheit gleich.

Es folgt nämlich in diesem Falle *) aus (25.)

$$(28.) \quad \begin{cases} 0 = \left(p_i - \frac{1}{F_i}\right)u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0, \\ 0 = q_i u_0 + \left(q_i' - \frac{1}{F_i}\right)v_0 + q_i'' w_0, \\ 0 = p_{i-1} u_0 + p_{i-1}' v_0 + \left(p_{i-1}'' - \frac{1}{F_i}\right)w_0. \end{cases}$$

oder aus (26.)

$$(29.) \quad \begin{cases} 0 = (P_i - F_i)u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i, \\ 0 = P_i' u_i + (P_{i+1}' - F_i)v_i + P_{i+2}' w_i, \\ 0 = P_i'' u_i + P_{i+1}'' v_i + (P_{i+2}'' - F_i)w_i. \end{cases}$$

Durch Elimination von u_0, v_0, w_0 aus (28.) oder von u_i, v_i, w_i aus (29.) findet man zwei cubische Gleichungen, deren Wurzeln die drei verschiedenen

*) Nach §. 3 ist nämlich $r_k = p_{k-1}$ etc. *H.*

Werthe sind, welche resp. $\frac{1}{F_i}$ und F_i annehmen, wenn man darin für x successive x' und x'' setzt. Das von $\frac{1}{F_i}$ und F_i freie Glied in der Determinante der Gleichungen (28.) und (29.) ist die Norm resp. der Grösse $\frac{1}{F_i}$ und F_i. Dieses Glied der Determinante ist wiederum eine Determinante, welche nach dem Obigen (§. 4) den Werth $+1$ hat.

§. 10. Man sieht, dass im Vorhergehenden die Norm eines complexen Ausdrucks auf eine eigenthümliche Weise eingeführt wird, nämlich als das constante Glied der algebraischen Gleichung, deren Wurzel der complexe Ausdruck ist. Ich will diese Gleichung für ein beliebiges F_i aufsuchen, ohne die obige Voraussetzung zu machen, dass $u_i = u_0$, $v_i = v_0$, $w_i = w_0$.

Da man nach der Voraussetzung jede complexe Zahl als eine lineare homogene Function von u_0, v_0, w_0, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, darstellen kann, so sei

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha u_0, \\ v_i &= \beta u_0 + \beta' v_0 + \beta'' w_0, \\ w_i &= \gamma u_0 + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0. \end{aligned}$$

Man erhält hiernach

$$\begin{aligned} 0 &= \left(p_i - \frac{\alpha}{F_i}\right)u_0 + \quad p_i' v_0 \quad + \quad p_i'' w_0, \\ 0 &= \left(q_i - \frac{\beta}{F_i}\right)u_0 + \left(q_i' - \frac{\beta'}{F_i}\right)v_0 + \left(q_i'' - \frac{\beta_i''}{F_i}\right)w_0, \\ 0 &= \left(r_i - \frac{\gamma}{F_i}\right)u_0 + \left(r_i' - \frac{\gamma'}{F_i}\right)v_0 + \left(r_i'' - \frac{\gamma_i''}{F_i}\right)w_0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Determinante dieser Gleichungen durch Δ, so wird F_i eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta = 0$. Der Coefficient von $\frac{1}{F_i^3}$ in Δ ist $-\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')$ und das ganz constante Glied $+1$, also, *wenn man* N_i *die Norm von* F_i *nennt,*

$$(30.) \qquad N_i = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma');$$

oder *es ist die Norm von* F_i *die Determinante der Gleichungen, welche* u_i, v_i, w_i *durch* u_0, v_0, w_0 *ausdrücken.*

Setzt man

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \delta, \quad \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \delta', \quad \beta\gamma' - \beta'\gamma = \delta'',$$

also $N_i = \alpha\delta$, so wird

$$u_0 = \frac{u_i}{\alpha},$$
$$v_0 = \frac{\delta' u_i}{\alpha\delta} + \frac{\gamma'' v_i - \beta'' w_i}{\delta},$$
$$w_0 = \frac{\delta'' u_i}{\alpha\delta} - \frac{\gamma' v_i - \beta' w_i}{\delta}.$$

Hieraus folgt

$$0 = \left(P_i - \frac{F_i}{\alpha}\right)u_i + P_{i+1}v_i + P_{i+2}w_i,$$
$$0 = \left(P_i' - \frac{\delta' F_i}{\alpha\delta}\right)u_i + \left(P_{i+1}' - \frac{\gamma'' F_i}{\delta}\right)v_i + \left(P_{i+2}' + \frac{\beta' F_i}{\delta}\right)w_i,$$
$$0 = \left(P_i'' - \frac{\delta'' F_i}{\alpha\delta}\right)u_i + \left(P_{i+1}'' + \frac{\gamma' F_i}{\delta}\right)v_i + \left(P_{i+2}'' - \frac{\beta' F_i}{\delta}\right)w_i.$$

Durch Elimination von u_i, v_i, w_i aus diesen Gleichungen erhält man ebenfalls eine Gleichung für F_i, welche die früher gefundenen enthalten muss.

§. 11. *Wir beschränken uns von hier an auf den Fall, wo* $u_0 = 1$ *ist,* woraus folgt, dass α eine ganze Zahl und zwar gleich u_i wird. Die Gleichung (30.) verwandelt sich durch diese Annahme in

$$(30^*.) \qquad N_i = u_i(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma').$$

Ferner sollen die β und γ von hier an ganze Zahlen bedeuten, was dadurch von selbst geschieht, dass man annimmt, die complexen Zahlen v_0 und w_0, von denen man ausging, und welche die Form

$$v_0 = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2,$$
$$w_0 = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$$

haben, seien so beschaffen, das $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1$. Alsdann lässt sich nämlich x und x^2 durch die Form $a + bv_0 + cw_0$, oder, da $u_0 = 1$, durch die Form $au_0 + bv_0 + cw_0$ darstellen, wo a, b, c ganze Zahlen sind; folglich nimmt jede complexe Zahl, also auch v_i und w_i diese Form an.

Aus (30*.) folgt nun, dass immer wenn N_i gleich 1 wird, auch

$$u_i = 1, \qquad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = 1,$$

ist, und dass auch umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, die Norm von F_i der Einheit gleich wird. *Aber damit die Norm von* F_i *der Einheit gleich werde, ist die eine Bedingung* $u_i = 1$ *ausreichend, indem sie die andere* $\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = 1$ *mit sich bringt.* Damit nämlich $\frac{u_i}{F_i}$ eine ganze complexe Zahl

$$p_i + p_i' v_0 + p_i'' w_0$$

ist, muss auch die Norm von $\frac{u_i}{F_i}$ oder

$$\frac{u_i^3}{N_i} = \frac{u_i^2}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}$$

eine ganze Zahl, *und daher u_i^2 durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sein.* Wenn daher $u_i = 1$, so muss $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ als Theiler von 1 der Einheit gleich sein. Es kann $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ nicht -1 sein, welches ebenfalls ein Theiler von 1 ist, weil f_i immer einen positiven Werth hat, wie aus seiner Definition hervorgeht, woraus folgt, dass auch F_i, und daher seine Norm $u_i(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')$ immer positiv ist. *Es muss daher, da u_i positiv ist, auch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ immer positiv sein.*

Man kann auch zeigen, *dass u_i selbst durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar ist.* Denn da *)

$$\frac{u_i}{F_i} = \frac{u_i F_i' F_i''}{N_i} = \frac{F' F_i''}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}$$

eine ganze complexe Zahl ist, (§. 7) so kann $F_i'F_i''$ durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ getheilt werden. Also ist auch, wenn man für die Wurzel einen ihrer beiden anderen Werthe setzt, F_iF_i'' und F_iF_i' durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar, also das Product

$$F_i^2F_i'F_i'' = u_iF_i(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')$$

durch $(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2$, und mithin u_iF_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$. Es wird also u_i multiplicirt mit dem Theiler von F_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sein. Es kann aber F_i keinen Theiler haben. Denn sonst würden alle drei Ausdrücke

$$\begin{aligned} u_i &= F_i(p_i+p_i'v_0+p_i''w_0), \\ v_i &= F_i(q_i+q_i'v_0+q_i''w_0), \\ w_i &= F_i(r_i+r_i'v_0+r_i''w_0) \end{aligned}$$

denselben Theiler besitzen, während doch u_i, v_i, w_i keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen. Da also F_i ohne Theiler, und u_iF_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar ist, muss u_i durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sein, w. z. b. w.

Anmerkung. Dass die Norm von F_i der Einheit gleich ist, wenn $u_i = 1$, erhellt auch unmittelbar aus dem allgemeinen Satz, dass F_i und $\frac{u_i}{F_i}$ oder $\frac{1}{F_i}$ nicht ganze complexe Zahlen sein können, wenn nicht die Norm von F_i entweder $+1$ oder -1 ist. Denn es werden dann die Normen von F_i

---

*) F_i' und F_i'' sind die Werthe, welche F_i annimmt, wenn man darin für x successive die beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung x' und x'' setzt. Es ist jetzt u_i wieder allgemein, und nicht grade 1.

oder $\frac{1}{F_i}$ ganze Zahlen, welche inverse Werthe haben, welche Eigenschaft nur den ganzen Zahlen $+1$ oder -1 zukommt.

§. 12. Es soll jetzt gezeigt werden, *dass durch* $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ *nicht blos* u_i *sondern auch* $\beta''\gamma-\beta\gamma''$ *und* $\beta\gamma'-\beta'\gamma$ *theilbar sind.*

Man setze

$$\Phi_i = \frac{u_i}{F_i} = \frac{F_i' F_i''}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'} = p_i + p_i' v_0 + p_i'' w_0,$$

so hat Φ_i keinen Theiler, weil p_i, p_i', p_i'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, da sie eine Horizontalreihe der neun Grössen bilden, deren Determinante $=1$ gefunden war. Aus den Gleichungen

$$\frac{u_i v_i}{F_i} = v_i \Phi_i = u_i (q_i + q_i' v_0 + q_i'' w_0) = (\beta + \beta' v_0 + \beta'' w_0)\, \Phi_i,$$

$$\frac{u_i w_i}{F_i} = w_i \Phi_i = u_i (r_i + r_i' v_0 + r_i'' w_0) = (\gamma + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0)\, \Phi_i$$

folgt, dass die beiden Ausdrücke

$$(\beta + \beta' v_0 + \beta'' w_0)\Phi_i \quad \text{und} \quad (\gamma + \gamma' v_0 + \gamma'' w_0)\Phi_i$$

und mithin auch die beiden Ausdrücke

$$\{-(\beta''\gamma-\beta\gamma'') + (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')v_0\}\Phi_i,$$
$$\{-(\beta\gamma'-\beta'\gamma) + (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')w_0\}\Phi_i$$

durch u_i und also durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar sind. Es sind also auch die beiden Ausdrücke

$$(\beta''\gamma-\beta\gamma'')\Phi_i \quad \text{und} \quad (\beta\gamma'-\beta'\gamma)\Phi_i$$

und mithin, da Φ_i keinen Theiler hat, auch $\beta''\gamma-\beta\gamma''$ und $\beta\gamma'-\beta'\gamma$ selber durch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ theilbar.

Es folgt hieraus, dass man immer

$$\beta = a\beta' + b\beta'',$$
$$\gamma = a\gamma' + b\gamma''$$

und daher (§. 10)

$$v_i = \beta'(v_0+a) + \beta''(w_0+b),$$
$$w_i = \gamma'(v_0+a) + \gamma''(w_0+b)$$

setzen kann, wo a *und* b *ganze Zahlen sind.*

Da ein Theiler von v_i alle drei Zahlen β, β', β'' theilt, so theilt er auch $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ und mithin auch u_i, weil dieses (§. 11) ein Vielfaches von $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ ist. Ebenso wird jeder Theiler von w_i die Zahlen γ, γ', γ''.

$\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$ und u_i theilen. *Hieraus folgt, dass v_i und w_i keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können*, weil denselben auch u_i haben müsste, und keine Zahl zugleich u_i, v_i, w_i theilt.

Es sei k_i der gemeinschaftliche Theiler der Zahlen β_i und β_i', der also auch Theiler von

$$v_i, \quad \beta'\gamma''-\beta''\gamma', \quad u_i, \quad v_i-l_iu_i$$

ist. Setzt man

$$v_i-l_iu_i = k_i\varphi_i,$$

wo φ_i keinen Theiler hat, so wird

$$\varphi_iF_{i+1} = \frac{\varphi_if_iF_i}{k_i} = \frac{u_{i+1}}{k_i}F_i,$$

und mithin, da F_i keinen Theiler hat, k_i Theiler von u_{i+1}. *Es theilt daher k_i sowohl u_i als u_{i+1}, oder es ist u_i sowohl durch k_i als durch k_{i-1} theilbar.*

Setzt man

$$\beta'\gamma''-\beta''\gamma' = C_i$$

und wie oben

$$p_i+p_i'v_0+p_i''w_0 = \Phi_i,$$

so wird $u_i = F_i\Phi_i$, und, da die Norm von F_i oder

$$F_iF_i'F_i'' = C_iu_i,$$

$$F_i'F_i'' = C_i\Phi_i.$$

Aus der Gleichung

$$f_i'f_i'' = \frac{k_iu_{i+1}}{g_i}(v_i-l_iu_i)$$

folgt, *dass g_i Theiler von $k_ik_iu_{i+1}$ ist.* Bemerkt man die Gleichung

$$\Phi_i(v_i-l_iu_i) = \Phi_iF_i\Phi_{i+1} = u_i\Phi_{i+1},$$

so wird

$$F_{i+1}'F_{i+1}'' = C_{i+1}\Phi_{i+1} = \frac{f_i'f_i''}{k_i^2}F_i'F_i'' = C_i\Phi_i\frac{u_{i+1}}{k_ig_i}(v_i-l_iu_i) = \frac{C_iu_iu_{i+1}}{k_ig_i}\Phi_{i+1},$$

also

$$C_{i+1}k_ig_i = C_iu_iu_{i+1}$$

oder

$$g_i = C_i\frac{u_i}{k_i}\cdot\frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}.$$

Es ist also g_i das Product der drei ganzen Zahlen C_i, $\frac{u_i}{k_i}$, $\frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}$, oder wenn man will, das Product der vier ganzen Zahlen

$$\frac{k_{i-1}C_i}{u_{i-1}}, \quad \frac{u_{i-1}}{k_{i-1}}, \quad \frac{u_i}{k_i}, \quad \frac{u_{i+1}}{C_{i+1}}.$$

Die erste von diesen vier Grössen ist nämlich eine ganze Zahl, weil $\frac{u_{i-1}}{k_{i-1}}$ in w_i aufgeht, und jeder Theiler von w_i, wie in diesem Paragraphen bewiesen wurde, auch C_i theilt. Ferner ist $\frac{u_i}{k_i}$ eine ganze Zahl, weil, wie man oben §. 7 sah, $k_i w_{i+1} = f_i u_i$ und f_i durch keine ganze Zahl theilbar ist, also k_i in u_i aufgehen muss.

Da g_i ein Theiler von $h_i k_i u_{i+1}$ ist, so folgt hieraus, *dass* $\frac{C_i}{h_i}\frac{u_i}{k_i}$ *Theiler von* $k_i C_{i+1}$ *ist.* Aus der Gleichung

$$g_i \cdot \frac{k_i C_{i+1}}{u_i} = C_i u_{i+1}$$

ergiebt sich, *dass* g_i *Theiler von* $C_i u_{i+1}$ *oder* $\frac{g_i}{C_i}$ *Theiler von* u_{i+1} *ist.* Es folgt aus dem Vorstehenden ferner, *dass* $\frac{C_i}{h_i}$ *Theiler von* $k_i \cdot \frac{C_{i+1} k_i}{u_i}$ *ist.*

Aus $u_i = F_i \Phi_i$ ergiebt sich

$$u_i^2 = u_i F_i \Phi_i = F_i' F_i'' \Phi_i' \Phi_i'' = C_i \Phi_i \Phi_i' \Phi_i'',$$

und daher

$$\Phi_i' \Phi_i'' = \frac{u_i}{C_i} F_i.$$

Es folgen hieraus die Normen von F_i, f_i, Φ_i resp. gleich

$$C_i u_i, \quad \frac{u_{i+1}^2}{g_i}, \quad \frac{u_i^2}{C_i}.$$

Man ersieht ferner aus diesen Formeln, dass die Producte

$$F_i' F_i'', \quad f_i' f_i'', \quad \Phi_i' \Phi_i''$$

resp. die Zahlen

$$C_i, \quad \frac{k_i u_{i+1} k_i}{g_i}, \quad \frac{u_i}{C_i}$$

zu ihren grössten Theilern haben.

Setzt man

$$q_i + q_i' v_0 + q_i'' w_0 = \Psi_i,$$

so hat man die Gleichungen

$$\Phi_i v_i = \Psi_i u_i,$$
$$\Phi_i w_i = \Phi_{i-1} u_i.$$

Es folgt hieraus, dass die beiden Ausdrücke

$$(\gamma'' v_i - \beta'' w_i)\Phi_i = C_i(v_0 + a)\Phi_i,$$
$$(\beta' w_i - \gamma' v_i)\Phi_i = C_i(w_0 + b)\Phi_i$$

durch u_i theilbar sind. Es werden daher die beiden complexen Ausdrücke

$$(v_0+a)\Phi_i, \quad (w_0+b)\Phi_i,$$

durch die Zahl $\frac{u_i}{C_i}$ theilbar, und $\frac{u_i}{C_i}$ theilt die Normen*) von v_0+a und w_0+b.

Hieraus ergiebt sich die folgende merkwürdige Eigenschaft der Grössen u_i, v_i, w_i. *Es sei*

$$v_i = \beta_i'(v_0+a_i)+\beta_i''(w_0+b_i),$$

$$w_i = \gamma_i'(v_0+a_i)+\gamma_i''(w_0+b_i),$$

so sind die Zahlen

$$\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$$

so beschaffen, dass in Bezug auf dieselben als Moduln die cubischen Gleichungen, deren Wurzeln v_0 und w_0 sind, gelöst werden können, und es werden resp. $-a_i$ und $-b_i$ die Werthe der Wurzeln dieser Congruenzen. Ist insbesondere

$$v_0 = \sqrt[3]{n}, \quad w_0 = \sqrt[3]{n^2},$$

so sind die Zahlen $\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$ solche, von denen n cubischer Rest ist, und es werden

$$a_i^3+n, \quad b_i^3+n^2$$

durch $\frac{u_i}{\beta_i'\gamma_i''-\beta_i''\gamma_i'}$ theilbar.

Zur Vervollständigung des vorstehenden Satzes für den Fall, wo $v_0 = x$, $w_0 = x^2$, muss noch bemerkt werden, *dass auch a^2+b durch $\frac{u_i}{C_i}$ aufgeht.* Da

*) Wenn ich von den Ausdrücken zu den Normen übergehe, so finde ich, dass das C_i fache der Normen durch $\frac{u_i}{C_i}$ theilbar ist, kann also das obige Resultat nur unter der Voraussetzung nachweisen, dass C_i zu $\frac{\mu_i}{C_i}$ relative Primzahl ist. Haben die beiden Grössen den grössten Theiler δ gemein, so kann ich demnach nur schliessen, dass die Normen durch $\frac{u_i}{\delta C_i}$ theilbar sind, wodurch die Resultate bis zum Schluss dieses Paragraphen sich etwas modificiren würden. Dieser Theil des Manuscriptes, der aus einer Reihe von Einschiebungen besteht, befindet sich in einem weniger druckfertigen Zustande als der frühere, und giebt nicht hinreichende Andeutungen für den Beweis.

Den folgenden Satz erhält man, da die Norm von $a+v_0$ gleich

$$a^3+a^2(v_0+v_0'+v_0'')+a(v_0v_0'+v_0'v_0''+v_0''v_0)+v_0v_0'v_0''$$

ist, und die Coefficienten der Potenzen von a zugleich die Coefficienten der Gleichung für $-v$ sind. H.

nämlich in diesem Falle die Ausdrücke

$$(a+x)\Phi_s, \quad (b+x^2)\Phi_s$$

durch $\frac{n_s}{C_s}$ aufgehen, so ist dies auch der Fall mit

$$\{(a-x)(a+x)+b+x^2\}\Phi_s = (a^2+b)\Phi_{s-2},$$

woraus der zu beweisende Satz folgt. Man wird im Allgemeinen zeigen können, *dass die zwischen den Grössen v_s und w_s Statt findende Gleichung zweiten Grades eine Congruenz in Bezug auf den Modul $\frac{n_s}{C_s}$ wird, wenn man v_s und w_s resp. durch $-a$ und $-b$ ersetzt.*

§. 13. Ich will jetzt einige allgemeine Betrachtungen über den Fall anstellen, wenn eine aus den Wurzeln einer cubischen Gleichung gebildete Zahl selber keinen Theiler hat, aber das Product zweier ihrer Werthe durch eine Zahl theilbar ist.

Es seien s, s', s'' die Werthe der complexen Zahl, welche respective aus der ersten, zweiten, dritten Wurzel der Gleichung, oder den Grössen x, x', x'' gebildet werden. Man kann dann mittelst der gegebenen Gleichung das Product $s's''$ durch die erste Wurzel ausdrücken, und es wird dieser Ausdruck wieder eine complexe Zahl, von der ich annehme, dass sie einen Theiler t habe. Denselben Theiler werden die Producte $s''s$ und ss' besitzen, wenn man dieselben respective durch die zweite und dritte Wurzel ausdrückt. Es wird daher das Product

$$(s-s')(s-s'')(s'-s'') = s's''(s'-s'')+s''s(s''-s)+ss'(s-s')$$

als eine ganze rationale Function der drei Wurzeln dargestellt werden können, deren Coefficienten ganze, durch t theilbare Zahlen sind.

Es sei

$$s = \alpha+\beta x+\gamma x^2, \quad s's'' = \alpha'+\beta' x+\gamma' x^2,$$

wo die Buchstaben nicht ihre frühere Bedeutung haben. Zufolge der gemachten Voraussetzung sollen α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, aber α', β', γ' durch t aufgehen. Substituirt man die Ausdrücke von s' und s'', so erhält man

$$s'-s'' = (x'-x'')\{\beta+\gamma(x'+x'')\} = (x'-x'')(\delta-\gamma x),$$

wo

$$\delta = \beta+\gamma a,$$

wenn a die durch die Gleichung gegebene *Summe der drei Wurzeln x, x', x''* bezeichnet. Hieraus folgt, wenn man

$$X = (x-x')(x-x'')(x'-x'')$$

setzt, die Gleichung

$$(s-s')(s-s'')(s'-s'') = X(\delta-\gamma x)(\delta-\gamma x')(\delta-\gamma x'').$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} s'-s'' + s''-s + s-s' &= 0, \\ x(s'-s'')+x'(s''-s)+x''(s-s') &= -\gamma X, \\ x^2(s'-s'')+x'^2(s''-s)+x''^2(s-s') &= \beta X, \end{aligned}$$

und daher

$$s's''(s'-s'')+s''s(s''-s)+ss'(s-s') = X(\beta\gamma'-\beta'\gamma).$$

Hieraus ergiebt sich die merkwürdige Gleichung

$$(\delta-\gamma x)(\delta-\gamma x')(\delta-\gamma x'') = \beta\gamma'-\beta'\gamma.$$

Es folgt aus dieser Gleichung, dass, *wenn t das Product $s's''$, und mithin die beiden Zahlen β' und γ' theilt, die gegebene cubische Gleichung eine in Bezug auf den Modul t lösbare Congruenz ist.*

Zur näheren Erläuterung dieses Satzes bemerke ich, *dass t mit γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben kann.* Es müsste nämlich durch diesen auch das Product

$$(\alpha+\beta x')(\alpha+\beta x'')$$

aufgehen, welches, wenn man mit b die durch die cubische Gleichung gegebene Summe der Amben der drei Wurzeln bezeichnet, dem Ausdrucke

$$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2-x(\alpha\beta+a\beta^2)+x^2\beta^2$$

gleich wird. Hieraus aber würde folgen, dass auch α und β einen Theiler mit γ und t gemein haben müssten, was gegen die Voraussetzung ist, dass α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen.

Die obige Formel giebt zugleich eine Wurzel der cubischen Congruenz. *Es ist dieselbe die Summe der Wurzeln vermehrt um eine Zahl, welche mit γ multiplicirt und durch t dividirt denselben Rest wie β giebt.* Für den besondern Fall, wenn die complexe Zahl s aus der Cubikwurzel von n gebildet ist, oder $x^3 = n$ die gegebene Gleichung war, folgt dass n *cubischer* Rest von t sein muss.

Ich will im Folgenden den Werth von γ' bestimmen. Stellt man die Grössen

$$x'x'', \quad x'^2+x''^2, \quad x'x''(x'+x''), \quad x'^2x''^2$$

durch einen Ausdruck von der Form

$$\nu x^2+\nu' x+\nu''$$

dar, und nennt die Werthe von ν in diesen vier Ausdrücken resp. ν_1, ν_2,

ν_3, ν_4, so wird

$$\gamma' = \beta^2\nu_1+\alpha\gamma\nu_2+\beta\gamma\nu_3+\gamma^2\nu_4.$$

Ist die gegebene cubische Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-c = 0,$$

so wird

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = -1, \quad \nu_3 = a, \quad \nu_4 = b.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\gamma' = \beta^2-\alpha\gamma+a\beta\gamma+b\gamma^2,$$

und hieraus, weil γ' durch t theilbar ist, wenn man wiederum $\delta = \beta+\gamma a$ einführt

$$\beta\delta-\alpha\gamma+\gamma^2 b \equiv 0 \pmod{t}.$$

Eine Wurzel ϱ der Congruenz

$$x^3-ax^2+bx-c \equiv 0 \pmod{t}$$

wurde durch die Congruenz

$$\gamma\varrho \equiv \delta \equiv \gamma a+\beta \pmod{t}$$

gegeben. Substituirt man in die gefundene Congruenz für δ diesen Werth $\gamma\varrho$ und dividirt durch γ, welches (s. o.) keinen Theiler mit t gemein hat, so erhält man

$$\alpha \equiv \beta\varrho+\gamma b \equiv \gamma(\varrho^2-a\varrho+b) \pmod{t}$$

und daher

$$\alpha\varrho \equiv \gamma c \pmod{t}.$$

Wenn die gegebene Gleichung

$$x^3 = n$$

ist, also $a = 0$, $b = 0$, $c = n$, so folgt hieraus

$$\alpha\varrho \equiv \gamma n, \quad \text{oder} \quad \alpha\beta \equiv n\gamma^2 \pmod{t}.$$

Aus den Congruenzen

$$\alpha\varrho \equiv \gamma c, \quad \beta\varrho-\alpha \equiv -\gamma b, \quad \gamma\varrho-\beta \equiv \gamma a \pmod{t}$$

folgt *die in Bezug auf x identische Congruenz*

$$(\varrho-x)(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \equiv \gamma(c-bx+ax^2-x^3) \pmod{t}.$$

Man erhält aus derselben einen Satz, der in dem Falle, dass t eine ungrade Primzahl ist, besonders einfach wird und besagt, *dass die beiden andern Wurzeln der cubischen Congruenz, wenn dergleichen vorhanden sind, durch die Congruenz*

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2 \equiv 0 \pmod{t}$$

gegeben werden, und dass daher die cubische Congruenz in Bezug auf den

Modulus t eine oder drei Wurzeln hat, je nachdem die Zahl

$$\beta^2-4\alpha\gamma$$

quadratischer Nichtrest oder Rest von t ist.

Setzt man

$$s = \frac{1}{h_i}(v_i - l_i u_i),$$

so wird

$$t = \frac{g_i}{h_i^2}.$$

Es ist daher die cubische Gleichung, aus deren Wurzel v_0 und w_0 gebildet sind, in Bezug auf alle Moduln $\frac{g_i}{h_i^2}$ lösbar. Wenn ferner $v_0 = x$, $w_0 = x^2$, so hat man

$$sh_i = \beta_i'(x+a) + \beta_i''(x^2+b) - l_i u_i$$

und es wird

$$\beta h_i = \beta_i', \quad \gamma h_i = \beta_i'';$$

β hat keinen Theiler mit γ gemein, weil h_i der Theiler von β_i' und β_i'' war. Ferner hat γ oder $\frac{\beta_i''}{h_i}$ keinen Theiler mit $t = \frac{g_i}{h_i^2}$ gemein. *Man hat in dem speciellen Falle, wenn $v_0 = \sqrt[3]{n}$, $w_0 = \sqrt[3]{n^2}$, also auch $x^3 = n$ ist, dass*

$$\varrho^3 \equiv n \pmod{t}$$

also

$$(\gamma\varrho)^3 - n\gamma^3 \equiv 0 \pmod{t},$$

woraus folgt, dass

$$\beta^3 - n\gamma^3 \equiv 0 \pmod{t}.$$

In diesem speciellen Falle ist also n von allen Zahlen $\frac{g_i}{h_i^2}$ cubischer Rest, und immer

$$\frac{1}{h_i^2}(\beta_i'^3 - n\beta_i''^3)$$

theilbar durch $\frac{g_i}{h_i^2}$.

Da ferner g_i ein Theiler von $C_i u_{i+1}$ war (§. 12) und C_i und u_{i+1} durch h_i theilbar sind, so ist $\frac{C_i}{h_i}$ ein Theiler von $\frac{g_i}{h_i^2}$. Man hat auch

$$\frac{\gamma_i''^3}{h_i^6}\{\beta_i'^3 - n\beta_i''^3\} = \frac{\beta_i''^3}{h_i^3}(\gamma_i'^3 - n\gamma_i''^3) + \frac{\beta_i'^3\gamma_i''^3 - \beta_i''^3\gamma_i'^3}{h_i^3}.$$

Das letzte Glied ist durch

$$\frac{C_i}{h_i} = \frac{\beta_i'\gamma_i'' - \beta_i''\gamma_i'}{h_i}$$

theilbar, während γ, d. h. $\frac{\beta_i''}{h_i}$ keinen Theiler mit t, also auch mit $\frac{C_i}{h_i}$ ge-

mein hat. Hieraus folgt, *dass auch*

$$(\gamma_i^{(3)} - n\gamma_i^{(2)})$$

theilbar durch $\frac{C_i}{k_i}$ ist.

§. 14. Um mich in diesen Algorithmen näher zu orientiren, und zu sehen, ob die Quotienten l_i und m_i, wie bei der Verwandlung der Quadratwurzeln in einen Kettenbruch, periodisch wiederkehren, endlich, ob man hierbei auf complexe Ausdrücke kommt, deren Norm $=1$ wird, habe ich, als ich zuerst im Jahre 1839 diesen Gegenstand untersuchte, mehrere Beispiele berechnet, welche ich hier mittheilen will, da seitdem mehrere Mathematiker sich mit ähnlichen Untersuchungen zu beschäftigen angefangen haben, denen solche ziemlich mühsame Beispiele zur Aufstellung einer vollständigen Theorie zu Anhaltspunkten dienen können. Das Resultat, dass man hierbei nach einigen unregelmässigen Anfangsgliedern zuletzt wirklich auf Perioden geführt wird, habe ich in damaliger Zeit meinen Freunden *Dirichlet* und *Borchardt* mitgetheilt.

Erstes Beispiel.

Entwickelung von $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$.

$(\sqrt[3]{2}=1{,}260;\ \sqrt[3]{4}=1{,}587)$.

$u_0 = 1$ $\qquad$ $l_0 = 1$

$v_0 = \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $m_0 = 1$

$w_0 = \sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $f_0 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_1 = f_0(\sqrt[3]{2}-1) = 1$ $\qquad$ $l_1 = 2$

$v_1 = f_0(\sqrt[3]{4}-1) = \sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $m_1 = 3$

$w_1 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $f_1 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_2 = f_1(\sqrt[3]{2}-1) = 1$ $\qquad$ $l_2 = 3$

$v_2 = f_1(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2) = \sqrt[3]{2}+2$ $\qquad$ $m_2 = 3$

$w_2 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ $\qquad$ $f_2 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

$u_3 = f_2(\sqrt[3]{2}-1) = 1$

$v_3 = f_2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2) = \sqrt[3]{2}+2$

$w_3 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$

Weiter braucht man die Rechnung nicht fortzusetzen, da u_3, v_3, w_3 dieselben Grössen wie u_2, v_2, w_2 sind, und also auch alle folgenden, wenn $i \geqq 2$, dieselben Werthe

$$u_i = 1, \quad v_i = \sqrt[3]{2}+2, \quad w_i = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

erhalten. Schreibt man, um die unregelmässigen Anfangsglieder zu vermeiden, u_0, v_0, w_0 für u_2, v_2, w_2 und berechnet die ganzen Zahlen p_i, p_i', etc., P_i, P_i', etc. nach den gegebenen Regeln, indem man alle Quotienten l und m gleich 3 setzt, so erhält man

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i} = (\sqrt[3]{2}-1)^i = p_i + p_i'(\sqrt[3]{2}+2) + p_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),$$

$$\frac{2+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i} = (\sqrt[3]{2}-1)^i(2+\sqrt[3]{2}) = q_i + q_i'(\sqrt[3]{2}+2) + q_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1);$$

ferner

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i &= P_i + P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2) + P_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\
(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i(2+\sqrt[3]{2}) &= P_i' + P_{i+1}'(\sqrt[3]{2}+2) + P_{i+2}'(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\
(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i &= P_i'' + P_{i+1}''(\sqrt[3]{2}+2) + P_{i+2}''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1).
\end{aligned}$$

Daraus, dass sich die Quotienten l und m nicht ändern, wenn man ihre Indices vermehrt, ergiebt sich zufolge der aus den Gleichungen (10*.) und (9*.) für $k=1$ abgeleiteten Formeln

$$P_i'' = P_{i+1}, \quad P_i' = 3P_i + P_{i-1}, \quad p_i' = p_{i-1}, \quad p_i'' = p_{i-2}.$$

Die vorstehenden Formeln geben ein leichtes Mittel, die Potenzen von $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ zu bilden, indem man sie unter der Form

$$P_i + P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2) + P_{i+2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1) = (\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^i$$

darstellt, wo

$$P_0 = 1, \ P_1 = 0, \ P_2 = 0, \ P_3 = 1, \ P_4 = 3, \ P_5 = 12, \ P_6 = 46, \ P_7 = 177,$$

und immer

$$P_{i+3} = 3(P_{i+2}+P_{i+1}) + P_i.$$

Um dies zu prüfen setze man

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = x,$$

woraus

$$x\sqrt[3]{2} = x+1, \quad x^3 = 3x^2+3x+1$$

und daher auch

$$x^{i+3} = 3x^{i+2}+3x^{i+1}+x^i$$

folgt, woraus sich die angegebene recurrirende Bildungsweise von x_i ergiebt.

Unter derselben Form kann man nach dem Vorstehenden leicht auch die positiven Potenzen von $\sqrt[3]{2}-1$ darstellen. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= p_i+p_i'(\sqrt[3]{2}+2)+p_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)\\ &= p_i+p_{i-1}(\sqrt[3]{2}+2)+p_{i-2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\end{aligned}$$

wo

$$p_0=1,\ p_1=-3,\ p_2=6,\ p_3=-8,\ p_4=3,\ p_5=21,\ p_6=-80,\ \text{etc.}$$

und immer

$$p_{i+3} = -3(p_{i+2}+p_{i+1})+p_i.$$

Auch dies folgt, wenn man

$$\sqrt[3]{2}-1 = y$$

setzt, aus den Gleichungen

$$y^3=-3y^2-3y+1, \qquad y^{i+3}=-3y^{i+2}-3y^{i+1}+y^i.$$

Von p_6 an werden die Grössen p_i regelmässig das Zeichen wechseln und ihrem absoluten Werthe nach jede ungefähr das Dreifache der vorhergehenden, wie dies auch bei den Grössen P_i der Fall ist. Es wird demnach p_i immer absolut kleiner als P_{i+1}.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= p_i +p_i'(\sqrt[3]{2}+2) +p_i''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\\ (\sqrt[3]{2}-1)^{i-1} &= p_{i-1}+p_{i-1}'(\sqrt[3]{2}+2)+p_{i-1}''(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)\end{aligned}$$

geben, wenn man die oben gefundenen Ausdrücke (20.) der Grössen P durch die Grössen p benutzt

$$\begin{aligned}p_i''(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-1}''(\sqrt[3]{2}-1)^i &= -P_{i+1}'+P_{i+1}(\sqrt[3]{2}+2),\\ p_i'(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-1}'(\sqrt[3]{2}-1)^i &= P_{i+1}''-P_{i+1}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1),\end{aligned}$$

oder da $p_i''=p_{i-2}$, $p_i'=p_{i-1}$, $P_{i+1}''=P_{i+2}$, $P_{i+1}'=3P_{i+1}+P_i$,

$$\begin{aligned}p_{i-2}(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-3}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= -P_i +P_{i+1}(\sqrt[3]{2}-1),\\ p_{i-1}(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-p_{i-2}(\sqrt[3]{2}-1)^i &= P_{i+2}-P_{i+1}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1).\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen geben für $\sqrt[3]{2}-1=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ Näherungswerthe $\frac{P_i}{P_{i+1}}, \frac{P_{i+1}}{P_{i+2}}$. Diese Näherungswerthe werden nach einander

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{13},\ \tfrac{12}{46},\ \tfrac{46}{177},\ \tfrac{177}{681},\ \text{u. s. w.}$$

Der Näherungswerth $\frac{177}{681}$ beträgt 0,259912, während der wahre Werth 0,259921 ist.

Addirt man die beiden vorstehenden Gleichungen, so erhält man die Reihe der Näherungswerthe für $\sqrt[3]{4}$ durch die Formel

$$(p_{i-1}+p_{i-2})(\sqrt[3]{2}-1)^{i-1}-(p_{i-2}+p_{i-3})(\sqrt[3]{2}-1)^{i}$$
$$=P_{i+2}-2P_{i+1}-P_{i+1}\sqrt[3]{4}-P_i=P_{i+1}+2P_i+P_{i-1}-P_{i+1}\sqrt[3]{4},$$

woraus annäherungsweise

$$\sqrt[3]{4}=\frac{P_{i+1}+2P_i+P_{i-1}}{P_{i+1}}, \qquad \sqrt[3]{4}-1=\frac{2P_i+P_{i-1}}{P_{i+1}}.$$

Setzt man $2P_i+P_{i-1}=Q_{i-1}$, so wird

$$Q_2=2, \quad Q_3=7, \quad Q_4=27, \quad Q_5=104, \quad Q_6=400, \quad \text{etc.}$$

und allgemein

$$Q_{i+3} = 2(Q_{i+2}+Q_{i+1})+Q_i.$$

Die successiven Näherungswerthe für $\sqrt[3]{4}-1$ werden

$$\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{7}{12}, \quad \tfrac{27}{46}, \quad \tfrac{104}{177}, \quad \tfrac{400}{681}, \quad \text{etc.}$$

Der Näherungswerth $\frac{400}{681}$ beträgt 0,58737 während der wahre Werth 0,58740 ist. Das Charakteristische dieser Annäherungen ist, dass die beiderlei Näherungswerthe für $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ Brüche *mit demselben Nenner* sind (cf. §. 6).

Zweites Beispiel.

Entwickelung von $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{9}$.

($\sqrt[3]{3}=1{,}442$, $\sqrt[3]{9}=2{,}080$)

Wenn

$$v_i-l_iu_i = \alpha\sqrt[3]{9}+\beta\sqrt[3]{3}+\gamma,$$
$$f_i = \alpha'\sqrt[3]{9}+\beta'\sqrt[3]{3}+\gamma',$$

so wird nach §. 7,

$$g_i\alpha'=\beta^2-\alpha\gamma, \quad g_i\beta'=3\alpha^2-\beta\gamma, \quad g_i\gamma'=\gamma^2-3\alpha\beta,$$

wo g_i der gemeinschaftliche Theiler der drei rechter Hand befindlichen Zahlen ist; ferner

$$k_iu_{i+1}=f_i(v_i-l_iu_i)=3(\beta\alpha'+\alpha\beta')+\gamma\gamma',$$
$$k_iv_{i+1}=f_i(w_i-m_iu_i),$$
$$k_iw_{i+1}=f_iu_i,$$

wo k_i eine Zahl ist, die alle Ausdrücke rechter Hand theilt.

Man setze $\sqrt[3]{3} = x$.

$$u_0 = 1 \qquad l_0 = 1 \qquad g_0 = 1$$
$$v_0 = x \qquad m_0 = 2 \qquad k_0 = 1$$
$$w_0 = x^2 \qquad f_0 = x^2+x+1$$

$$u_1 = 2 \qquad l_1 = 0 \qquad g_1 = 2$$
$$v_1 = f_0(x^2-2) = -x^2+x+1 \qquad m_1 = 2 \qquad k_1 = 2$$
$$w_1 = x^2+x+1 \qquad f_1 = x^2+x+2$$

$$u_2 = 1 \qquad l_2 = 1 \qquad g_2 = 1$$
$$v_2 = \tfrac{1}{2} f_1(x^2+x-3) = x \qquad m_2 = 5 \qquad k_2 = 1$$
$$w_2 = x^2+x+2 \qquad f_2 = x^2+x+1$$

$$u_3 = 2 \qquad l_3 = 1 \qquad g_3 = 2$$
$$v_3 = f_2(x^2+x-3) = -x^2+x+3 \qquad m_3 = 2 \qquad k_3 = 2$$
$$w_3 = x^2+x+1 \qquad f_3 = x^2+x+2$$

$$u_4 = u_2, \quad v_4 = v_2, \quad w_4 = w_2,$$

so dass man hier aufhören kann.

Wenn man, um wieder die nicht zur Periode gehörigen Anfangsglieder zu vermeiden, von den Grössen

$$u_0 = 1, \quad v_0 = x, \quad w_0 = x^2+x+2$$

ausgeht, wodurch alle unteren Indices um 2 verringert werden müssen, so hat man

$$u_{2i} = u_0 = 1 \qquad v_{2i} = v_0 = x \qquad w_{2i} = w_0 = x^2+x+2$$
$$u_{2i+1} = u_1 = 2 \qquad v_{2i+1} = v_1 = -x^2+x+3 \qquad w_{2i+1} = w_1 = x^2+x+1$$
$$f_{2i} = f_0 = x^2+x+1 \qquad l_{2i} = l_0 = 1 \qquad m_{2i} = m_0 = 5 \qquad k_{2i} = k_0 = 1$$
$$f_{2i+1} = f_1 = x^2+x+2 \qquad l_{2i+1} = l_1 = 1 \qquad m_{2i+1} = m_1 = 2 \qquad k_{2i+1} = k_1 = 2$$
$$F_2 = \frac{f_0 f_1}{2} = 2x^2+3x+4 \qquad F_{2i} = F_0^i \qquad F_{2i+1} = F_0^i f_0,$$

ferner

$$P_{2i+3} = 5P_{2i+2}+P_{2i+1}+P_{2i} \qquad p_{2i+3} = -p_{2i+2}-2p_{2i+1}+p_{2i}$$
$$P_{2i+4} = 2P_{2i+3}+P_{2i+2}+P_{2i+1} \qquad p_{2i+4} = -p_{2i+3}-5p_{2i+2}+p_{2i+1}$$
$$q_{2i+1} = p_{2i-1}-5p_{2i} = p_{2i+2}+p_{2i+1}$$
$$q_{2i+2} = p_{2i} \quad -2p_{2i+1} = p_{2i+3}+p_{2i+2},$$

in welchen Gleichungen man sämmtlichen Grössen auch einen oder zwei Accente geben kann. Aus (24.) folgt, dass die mit demselben Nenner behafteten Brüche

$$\frac{P'_{i+2}}{P_{i+2}}, \quad \frac{P''_{i+2}}{P_{i+2}}$$

Näherungswerthe der Grössen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ oder der Grössen x und x^2+x+2 sind. Die Anfangswerthe der Grössen P und p sind

$$\begin{array}{lllll} P_0=0 & P_1=0 & P_2=0 & P_3=1 & P_4=2 \\ P'_0=0 & P'_1=1 & P'_2=0 & P'_3=1 & P'_4=3 \\ P''_0=0 & P''_1=0 & P''_2=1 & P''_3=5 & P''_4=11 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} p_0=1 & p_1=-1 & p_2=-4 & p_3=7 & p_4=12 \\ p'_0=0 & p'_1=1 & p'_2=-1 & p'_3=-1 & p'_4=7 \\ p''_0=0 & p''_1=0 & p''_2=1 & p''_3=-1 & p''_4=-4. \end{array}$$

Man kann auf folgende Art die Grössen p'_i und p''_i auf p_i, und die Grössen P'_i und P''_i auf P_i zurückführen, und eine recurrirende Gleichung zwischen vier Grössen P erhalten, welche die Indices i, $i+2$, $i+4$, $i+6$ haben.

Aus den Formeln (9*.) in §. 5 ergeben sich für $k=1$ die allgemeinen Formeln

$$p_i=-l_0(p_{i-1})_1-m_0(p'_{i-1})_1+(p''_{i-1})_1$$
$$p'_i=(p_{i-1})_1 \qquad p''_i=(p'_{i-1})_1.$$

Zu diesen Gleichungen muss man die folgenden hinzufügen, welche sich aus ihnen ergeben, wenn man die Indices der Quotienten um 1 vermehrt,

$$(p_i)_1=-l_1(p_{i-1})_2-m_1(p'_{i-1})_2+(p''_{i-1})_2$$
$$(p'_i)_1=(p_{i-1})_2 \qquad (p''_i)_1=(p'_{i-1})_2.$$

Für unsern Fall geben diese Gleichungen

$$p_i=-(p_{i-1})_1-5(p'_{i-1})_1+(p''_{i-1})_1=-p'_i-5p_{i-2}+p'_{i-2}$$
$$(p_i)_1=p'_{i+1}=-p_{i-1}-2p'_{i-1}+p''_{i-1} \qquad p''_i=p_{i-2}.$$

Es folgen hieraus, wenn man in dem Ausdruck von p'_{i+1} den Index i um 1 erniedrigt und p_{i-4} für p''_{i-2} substituirt, zwischen den Grössen p und p' die beiden Gleichungen

$$-p'_i+p'_{i-2}=p_i+5p_{i-2}$$
$$p'_i+2p'_{i-2}=-p_{i-2}+p_{i-4},$$

und hieraus

$$3p'_i=-2p_i-11p_{i-2}+p_{i-4}$$
$$3p'_{i-2}=p_i+4p_{i-2}+p_{i-4}$$

oder

$$3p'_{i+4} = -2p_{i+4} - 11p_{i+2} + p_i = p_{i+6} + 4p_{i+4} + p_{i+2}$$
$$p_{i+6} = -6(p_{i+4} + 2p_{i+2}) + p_i.$$

In der letzteren Gleichung kann man auch p' oder p'' für p setzen, und sieht hieraus, dass

$$p_{2i}, \quad p'_{2i}, \quad p''_{2i}, \quad p_{2i+1}, \quad p'_{2i+1}, \quad p''_{2i+1}$$

die Coefficienten der allgemeinen Glieder in der Entwickelung von Brüchen werden, welche den Nenner

$$(1+2z)^3 - 9z^3$$

haben.

Auf ähnliche Art leitet man aus (10*.) die folgenden Gleichungen ab:

$$(P_i) = (P''_{i-1})_1, \qquad P'_i = (P_{i-1})_1 + l_0(P''_{i-1})_1, \qquad P''_i = (P'_{i-1})_1 + m_0(P''_{i-1})_1,$$
$$(P_i)_1 = P''_{i-1} \qquad (P'_i)_1 = P_{i-1} + l_1 P''_{i-1}, \qquad (P''_i)_1 = P'_{i-1} + m_1 P''_{i-1},$$

aus welchen

$$P'_i = P''_{i-2} + P_i, \quad P''_i = P_{i-2} + P''_{i-2} + 5P_i, \quad P_{i+1} = P'_{i-1} + 2P''_{i-1}$$

folgt. Die letzte dieser Gleichungen giebt

$$P_{i+1} = P''_{i-3} + P_{i-1} + 2P''_{i-1}.$$

Setzt man hierin $i+1$ für i, so hat man zwischen den Grössen P und P'' die beiden Gleichungen

$$P''_i - P''_{i-2} = P_{i-2} + 5P_i, \qquad 2P''_i + P''_{i-2} = P_{i+2} - P_i,$$

aus welchen

$$3P''_i = P_{i+2} + 4P_i + P_{i-2}, \qquad 3P''_{i-2} = P_{i+2} - 11P_i - 2P_{i-2}$$

und daher

$$3P''_{i+2} = \quad P_{i+4} + 4P_{i+2} + P_i = P_{i+6} - 11P_{i+4} - 2P_{i+2}$$
$$3P'_{i+4} = \quad 4P_{i+4} + 4P_{i+2} + P_i = P_{i+6} - \quad 8P_{i+4} - 2P_{i+2}$$
$$P_{i+6} = 12P_{i+4} + 6P_{i+2} + P_i$$

hervorgeht. In der letzten Gleichung kann auch P', P'' für P gesetzt werden. Man sieht aus derselben, dass die recurrirenden Reihen, deren allgemeine Glieder

$$P_{2i}, \quad P'_{2i}, \quad P''_{2i}, \quad P_{2i+1}, \quad P'_{2i+1}, \quad P''_{2i+1}$$

sind, aus der Entwickelung von Brüchen hervorgehen, welche den Nenner

$$9 - (2+y)^3$$

haben, der aus dem vorigen erhalten wird, wenn man $z = \frac{1}{y}$ setzt und mit $-y^3$ multiplicirt.

Die oben aufgestellte allgemeine Theorie ergiebt durch einige leicht anzustellende Betrachtungen, dass diese Nenner jedesmal die resp. mit $-z^3$, $-y^3$ multiplicirten Determinanten der Grössen

$$\begin{array}{ccc} p_i-\frac{1}{z} & p_i' & p_i'' \\ q_i & q_i-\frac{1}{z} & q_i'' \\ p_{i-1} & p_{i-1}' & p_{i-1}''-\frac{1}{z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_i-\frac{1}{y} & P_{i+1} & P_{i+2} \\ P_i' & P_{i+1}'-\frac{1}{y} & P_{i+2}' \\ P_i'' & P_{i+1}'' & P_{i+2}''-\frac{1}{y} \end{array}$$

werden, wenn i der Index der Periode oder

$$u_i = u_0, \quad v_i = v_0, \quad w_i = w_0$$

ist. Für unser Beispiel werden diese Determinanten

$$\begin{array}{ccc} -\left(4+\frac{1}{z}\right) & -1 & 1 \\ 3 & -\left(2+\frac{1}{z}\right) & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} -\frac{1}{y} & 1 & 2 \\ 0 & 1-\frac{1}{y} & 3 \\ 1 & 5 & 11-\frac{1}{y} \end{array},$$

und ihre resp. mit $-z^3$, $-y^3$ multiplicirten Ausdrücke geben in der That die im Vorhergehenden gefundenen Nenner.

Ich will noch bemerken, dass man, *wenn i grade ist*, die Gleichungen

$$-p_i'+p_{i-2}' = p_i+5p_{i-2} = p_{i-3}-p_{i-1},$$
$$P_i''-P_{i-2}'' = P_{i-2}+5P_i = P_{i+1}-P_{i-1}$$

hat, aus denen, da

$$p_1 = p_2' = -1, \quad P_0'' = P_1 = 0$$

ist, allgemein $p_i' = p_{i-3}$, $P_i'' = P_{i-1}$, oder wenn man $2i$ für i setzt

$$p_{2i}' = p_{2i-1}, \quad P_{2i}'' = P_{2i-1}$$

folgt.

Der complexe Ausdruck

$$F_2 = 2\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4,$$

hat zufolge des oben gegebenen allgemeinen Satzes, wie man leicht prüft, die Einheit zur *Norm*. Der inverse Werth derselben wird durch die Formel

$$\frac{1}{F_2} = \frac{k_0 k_1}{f_0 f_1} = \frac{(v_0-l_0u_0)(v_1-l_1u_1)}{u_0u_1},$$
$$= \frac{(\sqrt[3]{3}-1)(-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{2} = \sqrt[3]{9}-2$$

gegeben. Setzt man denselben $= y$, so wird

$$9-(2+y)^3 = 0,$$

wo der Ausdruck links der Nenner der Brüche ist, aus deren Entwickelun die recurrirenden Reihen hervorgehen, deren allgemeine Glieder die Grösse P_i, P_{i+1}, P'_i, etc. sind.

Drittes Beispiel.

Entwickelung von $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{25}$.

$(\sqrt[3]{5} = 1{,}710,\ \sqrt[3]{25} = 2{,}924)$

Man setze $\sqrt[3]{5} = x$.

$u_0 = 1$ $\quad l_0 = 1$ $\quad g_0 = 1$

$v_0 = x$ $\quad m_0 = 2$ $\quad k_0 = 1$

$w_0 = x^2$ $\quad f_0 = x^2+x+1$

$f_0(x-1) = 4$ $\quad f_0(x^2-2) = -x^2+3x+3$

$u_1 = 4$ $\quad l_1 = 1$ $\quad g_1 = 8$

$v_1 = -x^2+3x+3$ $\quad m_1 = 1$ $\quad k_1 = 4$

$w_1 = x_2+x+1$ $\quad f_1 = x^2+x+2$

$f_1(-x^2+3x-1) = 8$ $\quad f_1(x^2+x-3) = 4x+4$

$u_2 = 2$ $\quad l_2 = 1$ $\quad g_2 = 1$

$v_2 = x+1$ $\quad m_2 = 3$ $\quad k_2 = 2$

$w_2 = x^2+x+2$ $\quad f_2 = x^2+x+1$

$f_2(x-1) = 4$ $\quad f_2(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$

$u_3 = 2$ $\quad l_3 = 0$ $\quad g_3 = 2$

$v_3 = -x^2+x+3$ $\quad m_3 = 2$ $\quad k_3 = 2$

$w_3 = x^2+x+1$ $\quad f_3 = 2x^2+x+7$

$f_3(-x^2+x+3) = 26$ $\quad f_3(x^2+x-3) = 2x^2+14x-6$

$u_4 = 13$ $\quad l_4 = 0$ $\quad g_4 = 26$

$v_4 = x^2+7x-3$ $\quad m_4 = 1$ $\quad k_4 = 13$

$w_4 = 2x^2+x+7$ $\quad f_4 = 2x^2+x-1$

$f_4(x^2+7x-3) = 78$ $\quad f_4(2x^2+x-6) = -13x^2+13x+26$

$u_5 = 6$ $\quad l_5 = 0$ $\quad g_5 = 3$

$v_5 = -x^2+x+2$ $\quad m_5 = 1$ $\quad k_5 = 6$

$w_5 = 2x^2+x-1$ $\quad f_5 = x^2+x+3$

$f_5(-x^2+x+2) = 6$ $\quad f_5(2x^2+x-7) = 6x+6$

$u_6 = 1$ $\quad l_6 = 2$ $\quad g_6 = 1$

$v_6 = x+1$ $\quad m_6 = 7$ $\quad k_6 = 1$

$w_6 = x^2+x+3$ $\quad f_6 = x^2+x+1 = f_0$

$f_6(x-1) = 4$ $\quad f_6(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$

$u_7 = 4$ $\quad l_7 = 0$ $\quad g_7 = 8$

$v_7 = -2x^2+2x+6$ $\quad m_7 = 1$ $\quad k_7 = 2$

$w_7 = x^2+x+1$ $\quad f_7 = 2x^2+x+7 = f_3$

$f_7(-2x^2+2x+6) = 52$ $\quad f_7(x^2+x-3) = 2x^2+14x-6$

$u_8 = 26$ $\quad l_8 = 0$ $\quad g_8 = 26$

$v_8 = x^2+7x-3$ $\quad m_8 = 1$ $\quad k_8 = 26$

$w_8 = 4x^2+2x+14$ $\quad f_8 = 2x^2+x-1 = f_4$

$f_8(x^2+7x-3) = 78$ $\quad f_8(4x^2+2x-12) = -26x^2+26x+52$

$u_9 = 3$ $\quad l_9 = 0$ $\quad g_9 = 3$

$v_9 = -x^2+x+2$ $\quad m_9 = 2$ $\quad k_9 = 3$

$w_9 = 2x^2+x-1$ $\quad f_9 = x^2+x+3 = f_5$

$f_9(-x^2+x+2) = 6$ $\quad f_9(2x^2+x-7) = 6x+6$

$u_{10} = 2$ $\quad l_{10} = 2$ $\quad g_{10} = 4$

$v_{10} = 2x+2$ $\quad m_{10} = 3$ $\quad k_{10} = 1$

$w_{10} = x^2+x+3$ $\quad f_{10} = x^2+x+1 = f_6$

$f_{10}(2x-2) = 8$ $\quad f_{10}(x^2+x-3) = -x^2+3x+7$

$u_{11} = 8$ $\quad l_{11} = 1$ $\quad g_{11} = 8$

$v_{11} = -x^2+3x+7$ $\quad m_{11} = 1$ $\quad k_{11} = 8$

$w_{11} = 2x^2+2x+2$ $\quad f_{11} = x^2+x+2 = f_1$

$f_{11}(-x^2+3x-1) = 8$ $\quad f_{11}(2x^2+2x-6) = 8x+8$

$u_{12} = 1$ $\quad l_{12} = 2$ $\quad g_{12} = 1$

$v_{12} = x+1$ $\quad m_{12} = 6$ $\quad k_{12} = 1$

$w_{12} = x^2+x+2$ $\quad f_{12} = x^2+x+1 = f_6$

$f_{12}(x-1) = 4$ $\quad f_{12}(x^2+x-4) = -2x^2+2x+6$

$u_{13} = 4$

$v_{13} = -2x^2+2x+6$

$w_{13} = x^2+x+1$

Da nun

$$u_{13} = u_7, \quad v_{13} = v_7, \quad w_{13} = w_7,$$

o beginnt an dieser Stelle die Periode, und die Rechnung kann demnach hier bgebrochen werden.

15.
Geometrische Theoreme.

(Bruchstücke aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

(Vorbemerkung von Herrn *O. Hermes*.)

Unter dem obigen Titel hat bekanntlich *Jacobi* im 12ten Bande von *Crelles* Journal in einem Briefe an *Steiner* die ersten Mittheilungen über die nach ihm benannte Erzeugungsweise der Linien und Flächen zweiten Grades gemacht. Die vorliegenden Bruchstücke handeln über denselben Gegenstand, und obschon nur in losem Zusammenhange, gestatten sie doch eine Einsicht in die Methode, welcher sich *Jacobi* bei der Bearbeitung des erwähnten Themas bedient; sie sind bis vor einiger Zeit getrennt in verschiedenen Händen gewesen, und es hat darum ihre Herausgabe einen so langen Aufschub erlitten. Diesem Umstande ist es vorzüglich zuzuschreiben, dass die *Jacobi*sche Ausdehnung der Focalerzeugung der Kegelschnitte auf die Flächen des zweiten Grades, obgleich die einfachste, anschaulichste und vollständigste von allen Erzeugungsweisen dieser Flächen, noch keineswegs diejenige Anerkennung gefunden hat, welche sie in so hohem Maasse verdient, und dass man immer noch das *Ivory*sche Theorem über die confocalen Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades, von welchem *Jacobi* bei der Entwicklung seiner Sätze ausgeht, als „für die Geometrie noch nicht genug ausgebeutet" bezeichnen muss.

In dem ersten Bruchstücke, welches von *Jacobi* selbst die Ueberschrift „Geometrische Theoreme" erhalten hat, findet sich nach einer kurzen Einleitung, in welcher *Jacobi* eine genauere Discussion der erzeugten Curven und Flächen zu liefern verspricht, eine kurze analytische Darstellung seiner Methode, die Focaleigenschaften der Kegelschnitte aus dem *Ivory*schen Theorem herzuleiten. Das zweite, umfangreichere Bruchstück enthält die Lösung einer Aufgabe über confocale Kegelschnitte, welche für die spätere Discussion der entstehenden Flächen eine nothwendige Voraussetzung bildet, und an diese sich anschliessend diese Discussion selbst und eine Verallgemeinerung der Entstehungsweise der Flächen.

Diese letzten Untersuchungen erscheinen ebenfalls nur in einem ziemlich losen Zusammenhange mit einander; jedoch ist absichtlich der Wortlaut des Manuscriptes so treu als möglich beibehalten worden. Zur Erleichterung des Verständnisses hat sich der Herausgeber veranlasst gesehen, jedes der beiden Bruchstücke, aus welchen sich diese nachgelassene *Jacobi*sche Arbeit zusammensetzt, durch eine Vorbemerkung einzuleiten. Noch ist zu erwähnen, dass der grössere Theil des zweiten Bruchstücks bereits von dem im Frühjahr 1861 verstorbenen Dr. *Sigismund Cohn* geordnet und für den Druck vorbereitet worden ist.

Erstes Bruchstück.

Wenn man über einer festen Basis Dreiecke errichtet, deren beide Schenkel eine constante Summe oder eine constante Differenz haben, so ist der Ort der Spitze dieser Dreiecke ein Kegelschnitt. Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

Wenn man über zwei festen Basen AB und CD mit denselben Schenkelpaaren AP = CQ, BP = DQ Dreiecke errichtet, und die einen Dreiecke CDQ verschwinden, so ist der Ort der Spitzen P der anderen Dreiecke ABP ein Kegelschnitt.

Denn wenn ein Dreieck verschwindet, so fällt die Spitze in die Grundlinie, und es wird die Summe oder die Differenz der Schenkel gleich der Grundlinie selber, also constant. Während bei der gewöhnlichen Art, den angeführten Elementarsatz auszudrücken, sich nicht absehen liess, wie er auf *Flächen zweiter Ordnung* ausgedehnt werden kann, so bietet diese neue Art, ihn auszusprechen, den Vortheil dar, die verlangte Verallgemeinerung unmittelbar und auf die natürlichste Weise zu geben. Man hat nämlich den ganz analogen Satz für den Raum:

Wenn man über zwei festen Dreiecken ABC und DEF als Basen mit denselben Schenkeln AP = DQ, BP = EQ, CP = FQ Pyramiden errichtet, und die über der einen Basis DEF errichteten Pyramiden DEFQ verschwinden, so ist der Ort der Spitze P der über der anderen Basis errichteten Pyramiden ABCP eine Fläche zweiter Ordnung.

Wenn die Pyramide *DEFQ* verschwindet, so fällt die Spitze *Q* in die Ebene der Basis *DEF*. Man hat aber auch die allgemeineren Sätze, dass der Ort der Spitze *P* eine Curve oder Fläche zweiter Ordnung ist, wenn *Q* in einer *beliebig* gegebenen geraden Linie oder Ebene liegt.

Ich habe diese Sätze zuerst im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals (J. 1834) in einem Briefe an *Steiner* mitgetheilt. Da sie eine Lücke in der Theorie der Flächen zweiter Ordnung auszufüllen scheinen, so will ich sie hier näher erörtern. Ich werde zuerst zeigen, wie sie eine unmittelbare Folge des für die Geometrie noch nicht genug ausgebeuteten Theorems *Ivorys* sind, *dass die Verbindungslinie beliebiger zwei in confocalen Ellipsen oder Ellipsoiden liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Ellipsen oder Ellipsoiden conjugirten Punkte ist.*

Hierauf werde ich in eine genauere Discussion der erzeugten Curven oder Flächen eingehen. Ich beginne mit den Kegelschnitten.

Es sei die Gleichung einer gegebenen Ellipse, auf ihre Hauptachsen bezogen,

$$\frac{xx}{mm} + \frac{yy}{nn} = 1,$$

und die Gleichung einer ihr confocalen Ellipse

$$\frac{xx}{mm+\varrho}+\frac{yy}{nn+\varrho} = 1,$$

wo $n<m$ sein mag. Zwei Punkte dieser Ellipsen, P und Q, deren Coordinaten

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta$$

und

$$x = \sqrt{mm+\varrho}.\alpha, \quad y = \sqrt{nn+\varrho}.\beta$$

sind, wo

$$\alpha\alpha+\beta\beta = 1,$$

heissen einander conjugirt. Hat man zwei andere conjugirte Punkte P' und Q', deren Coordinaten

$$x = m\alpha', \quad y = n\beta'$$

und

$$x = \sqrt{mm+\varrho}.\alpha', \quad y = \sqrt{nn+\varrho}.\beta'$$

sind, wo wieder

$$\alpha'\alpha'+\beta'\beta' = 1,$$

so wird

$$PQ'^2 = (m\alpha-\sqrt{mm+\varrho}.\alpha')^2+(n\beta-\sqrt{nn+\varrho}.\beta')^2,$$
$$P'Q^2 = (\sqrt{mm+\varrho}.\alpha-m\alpha')^2+(\sqrt{nn+\varrho}.\beta-n\beta')^2$$

und daher

$$PQ'^2-P'Q^2 = \varrho(\alpha'\alpha'+\beta'\beta'-\alpha\alpha-\beta\beta) = 0$$

oder

$$PQ' = P'Q,$$

welches der *Ivory*sche Satz für Ellipsen ist. Setzt man gleichzeitig $n\sqrt{-1}$ und $\beta\sqrt{-1}$ für n und β, so erhält man denselben Satz für confocale Hyperbeln.

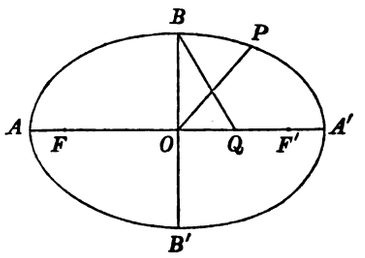
Lässt man ϱ bis zu dem Werthe $-nn$ abnehmen, und $nn+\varrho$ und y gleichzeitig verschwinden, so hat man für die Punkte der zweiten Ellipse

$$x = \sqrt{mm-nn}.\alpha, \quad y = 0.$$

Dieselbe reducirt sich daher, da α immer zwischen -1 und $+1$ liegt, auf das zwischen den beiden Brennpunkten gelegene Stück der grossen Achse, welches ich die *Grenzellipse* nennen werde. Es seien O, F, F' der Mittelpunkt und die Brennpunkte der gegebenen Ellipse, A und A' die Endpunkte ihrer grossen, B und B' die Endpunkte ihrer kleinen Achse. Setzt man $\alpha=0$, $\beta=\pm 1$, so erhält man als die conjugirten Punkte den Punkt O der Grenzellipse und die Punkte B oder B' der gegebenen Ellipse. Setzt man dagegen $\alpha=\pm 1$, $\beta=0$, so

sieht man, dass den Punkten F und F' der Grenzellipse die Punkte A und A' der gegebenen conjugirt sind. Sind daher allgemein P und Q zwei beliebige conjugirte Punkte der gegebenen Ellipse und der Grenzellipse, so hat man nach dem *Ivory*schen Theorem

Fig. 1.



$$PF = QA, \quad PF' = QA', \quad PO = QB = QB'$$

und daher

$$PF + PF' = AA',$$

d. h.

die Summe der von den beiden Brennpunkten einer Ellipse F und F' nach einem ihrer Punkte P gezogenen Radii vectores ist immer der grossen Achse AA' gleich, und wenn man auf dieser die den beiden Radii vectores gleichen Stücke $AQ = FP$, $QA' = PF'$ abträgt, so wird die Entfernung des Punktes Q von den Endpunkten der kleinen Achse gleich der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkt der Ellipse.

Wenn durch die Gleichung

$$\frac{xx}{mm} - \frac{yy}{nn} = 1$$

eine Hyperbel gegeben ist, deren Mittelpunkt, Brennpunkte und Endpunkte der grossen (d. h. reellen) Achse wieder O, F und F', und A und A' heissen mögen, so sind die ihr confocalen Hyperbeln in der Gleichung

$$\frac{xx}{mm+\varrho} - \frac{yy}{nn-\varrho} = 1$$

enthalten. Zwei conjugirte Punkte P und Q der gegebenen und einer ihr confocalen Hyperbel haben zu Coordinaten

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta,$$
$$x = \sqrt{mm+\varrho}\,.\,\alpha, \quad y = \sqrt{nn-\varrho}\,.\,\beta,$$

wo

$$\alpha\alpha - \beta\beta = 1.$$

Eine Grenze der confocalen Hyperbeln entspricht dem Werthe $\varrho = nn$. Lässt man y und $nn-\varrho$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieser Grenzhyperbel

$$x = \sqrt{mm+nn}\,.\,\alpha, \quad y = 0.$$

Es reducirt sich daher diese Hyperbel, da $\alpha > 1$, auf die über F und F' hinaus nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Verlängerung der Linie FF'.

Setzt man $\alpha = \pm 1$, so sieht man, dass den Punkten F und F' der Grenzhyperbel die Scheitel A und A' der gegebenen Hyperbel conjugirt werden. Wenn der Punkt Q, von F oder F' an, die unendliche Verlängerung von FF' über F oder F' hinaus durchläuft, bewegt sich P auf der einen Hälfte des einen Zweiges der Hyperbel, und in jedem Augenblicke hat man

$$PF = QA, \quad PF' = QA',$$

also

$$PF' - PF = QA' - QA = AA',$$

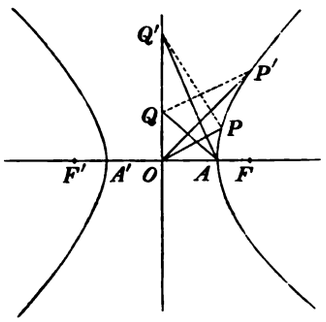
welches der bekannte Satz für die Hyperbel ist.

Man erhält für die confocalen Hyperbeln eine zweite **Grenze**, welche dem Werthe $\varrho = -mm$ entspricht. Lässt man nämlich x und $mm + \varrho$ gleichzeitig verschwinden, so wird für die Punkte dieser Grenzhyperbel

$$x = 0, \quad y = \sqrt{mm + nn}.\beta,$$

und da β keiner Begrenzung unterworfen ist, so reducirt sie sich auf die ganze Länge der kleinen (d. h. imaginären) Achse. Setzt man $\beta = 0$, so sieht man, dass dem Punkte O dieser Grenzhyperbel die Scheitel (Endpunkte der grossen Achse) der gegebenen Hyperbel entsprechen *).

Fig. 2.



Hat man daher auf der gegebenen Hyperbel den Punkt P und auf der kleinen Achse den conjugirten Punkt Q der zweiten Grenzhyperbel, so wird $AQ = OP$, wodurch man leicht Q findet, wenn P gegeben ist und umgekehrt. Man wird deshalb aus dem *Ivory*schen Theorem folgenden Satz ableiten können:

Wenn man aus dem Mittelpunkte O und dem Scheitel A einer Hyperbel respective nach der Hyperbel und der kleinen Achse die gleichen Linien

$$OP = AQ, \quad OP' = AQ'$$

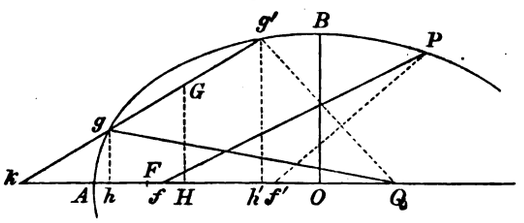
sieht, so hat man auch $PQ' = P'Q$.

Das *Ivory*sche Theorem führt aber mit derselben Leichtigkeit auf einen allgemeineren Satz, welcher eine Eigenschaft der beiden Linien angiebt, die

*) Man könnte auch so die beiden Achsen und mithin jede zwei zu einander rechtwinkligen Linien auf einander beziehen und immer zwei Punkte auf ihnen als conjugirte betrachten, wenn die Quadrate ihrer Abstände vom Schnittpunkte eine constante Differenz haben. *J.*

man aus den Punkten eines Kegelschnitts, z. B. der Ellipse Fig. 3, nach zwei *beliebigen* festen Punkten der grossen Achse zieht. Es seien nämlich f und f' zwei beliebige feste Punkte der Linie FF', die Punkte g und g' ihnen auf der Ellipse conjugirt, so hat man für jeden Punkt Q der Linie und den ihm conjugirten P der Ellipse

Fig. 3.



$$Pf = Qg, \quad Pf' = Qg'$$

und daher folgenden Satz:

Satz I.

Die beiden Linien, die man von zwei auf der grossen Achse zwischen den Brennpunkten beliebig liegenden festen Punkten nach den verschiedenen Punkten einer Ellipse zieht, können zu Schenkeln eines über einer anderen festen Basis beschriebenen Dreiecks genommen werden, dessen Spitze eine gerade Linie durchläuft.

Man kann diesen Satz auch so darstellen, wie ich ihn am angeführten Orte (Cr. J. Bd. XII) ausgesprochen habe:

Satz II.

Wenn man über zwei festen Basen gg' und ff' mit denselben Schenkeln $Qg = Pf$, $Qg' = Pf'$ Dreiecke beschreibt, und die Spitze Q der einen Dreiecke eine beliebig gegebene gerade Linie durchläuft, so beschreibt die Spitze P der anderen Dreiecke einen Kegelschnitt.

Wenn die gegebene gerade Linie die Basis gg' selber ist, so werden f, f' die Brennpunkte des Kegelschnitts. Aber man hat auch den allgemeineren Satz, dass, *wenn die gerade Linie durch den einen Endpunkt g der Basis geht, der entsprechende Endpunkt f der anderen Basis der eine Brennpunkt des Kegelschnitts wird.* Denn, wenn der Punkt g des Kegelschnitts in die gerade Linie ff', die grosse Achse, zu liegen kommt, so fällt g mit dem Endpunkt der grossen Achse A zusammen und der conjugirte Punkt f mit dem Brennpunkt F.

Ich will jetzt den nach Satz II. erzeugten Kegelschnitt näher bestimmen, wobei ich der besseren Unterscheidung wegen die Linien gg' und ff' die *erste* und *zweite* Basis nennen werde. Es sei in der ursprünglichen Figur 3, welche dem Satz I. zu Grunde liegt,

$$Of = \sqrt{mm - nn}\,.\,\alpha, \quad Of' = \sqrt{mm - nn}\,.\,\alpha',$$

so wird die zweite Basis

$$ff' = \sqrt{mm-nn}(\alpha-\alpha').$$

Die den Punkten f und f' conjugirten Punkte des Kegelschnitts g und g' haben die Coordinaten

$$m\alpha, \quad m\beta \quad \text{und} \quad m\alpha', \quad m\beta',$$

wo

$$\alpha\alpha+\beta\beta = \alpha'\alpha'+\beta'\beta' = 1.$$

Sind h und h' die Fusspunkte der von g und g' auf die gerade Linie gefällten Perpendikel, so sind $Oh = m\alpha$, $Oh' = m\alpha'$ gegeben, und wenn H die Mitte von h und h' ist,

$$2OH = m(\alpha+\alpha'),$$

ferner die Projection der ersten Basis auf diese Linie

$$hh' = m(\alpha-\alpha')$$

und daher

$$\frac{\sqrt{mm-nn}}{m} = \frac{ff'}{hh'}, \qquad \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{hh'^2-ff'^2}}{hh'}.$$

Ueberdies hat man

$$gh = n\beta, \qquad g'h' = n\beta'$$

und daher

$$\frac{hh'^2(g'h'^2-gh^2)}{hh'^2-ff'^2} = m^2(\beta'^2-\beta^2) = m^2(\alpha^2-\alpha'^2) = m(\alpha+\alpha').hh',$$

woraus

$$2OH = Oh+Oh' = \frac{hh'(g'h'^2-gh^2)}{hh'^2-ff'^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Lage des Mittelpunkts O des Kegelschnitts. Hat man O gefunden, so zeigen die Gleichungen

$$Of = \frac{ff'}{hh'}\cdot Oh, \qquad Of' = \frac{ff'}{hh'}\cdot Oh',$$

wo man die Punkte f und f' in der gegebenen geraden Linie anzunehmen hat, damit die ursprüngliche, dem Satz I. zu Grunde liegende Figur 3 erzeugt wird, in welcher der erzeugte Kegelschnitt die gegebene gerade Linie zur grossen Achse hat und durch die festen Punkte g und g' geht, die den Punkten f und f' conjugirt werden.

Man kann den für OH gefundenen Ausdruck etwas einfacher darstellen, wenn man den Schneidungspunkt k der nöthigenfalls verlängerten ersten Basis gg' mit der gegebenen geraden Linie zu Hilfe nimmt. Man hat nämlich

$$kh:kh' = gh:g'h'$$

und daher

$$kh'+kh:hh' = g'h'+gh:g'h'-gh.$$

Da

$$kh'+kh = 2kH,$$

so folgt hieraus

$$OH = kH\cdot\frac{(g'h'-gh)^2}{hh'^2-ff'^2} = kH\cdot\frac{gg'^2-hh'^2}{hh'^2-ff'^2},$$

$$kO = kH\cdot\frac{gg'^2-ff'^2}{hh'^2-ff'^2}.$$

Man findet ferner nach einiger Rechnung, wenn G der Mittelpunkt der ersten Basis gg' gegeben ist, das Quadrat der halben kleinen Achse

$$n^2 = \frac{(gg'^2-ff'^2)(Gh^2-\frac{1}{4}ff'^2)}{hh'^2-ff'^2}$$

oder

$$n^2 = \frac{kO}{kH}\cdot(Gh^2-\tfrac{1}{4}ff'^2).$$

Aus den gefundenen Formeln leitet man folgende Resultate ab:

I. Wenn die zweite Basis ff' sich auf einen Punkt reducirt, so wird der Kegelschnitt ein um diesen Punkt als Centrum beschriebener Kreis. Die Bedingung, dass der Kegelschnitt eine *Ellipse* sei, ist

$$ff' < hh'.$$

Der Mittelpunkt der Ellipse O liegt auf der Verlängerung von kH über H hinaus, und zwar liegen, wenn, wie in Figur 3., $g'h'>gh$ ist, h und h' auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von O, jenachdem

$$g'h'^2-gh^2 > \text{ oder } < hh'^2-ff'^2$$

d. h. jenachdem

$$g'h'^2+ff'^2 > \text{ oder } < gh'^2.$$

II. Wenn $ff' = hh'$ oder die zweite Basis gleich der Projection der ersten Basis auf die gegebene gerade Linie, so wird der Kegelschnitt eine *Parabel.*

III. Ist $ff' > hh'$, so wird der Kegelschnitt eine *Hyperbel.* Aus den Gleichungen

$$n^2 = \frac{(gg'^2-ff'^2)(Gh^2-\frac{1}{4}ff'^2)}{hh'^2-ff'^2},$$

$$m^2 = \frac{hh'^2(gg'^2-ff'^2)(Gh^2-\frac{1}{4}ff'^2)}{(hh'^2-ff'^2)^2}$$

folgt, dass n^2 negativ, m^2 positiv, oder dass die gegebene Linie die grosse Achse der Hyperbel ist, wenn ff' gleichzeitig kleiner oder grösser ist als die beiden Linien gg' und $2Gh$; ferner dass n^2 positiv, m^2 negativ, oder dass die gegebene Linie die kleine Achse der Hyperbel ist, wenn ff' zwischen gg' und $2Gh$ enthalten ist. Es ist übrigens

$$gg'^2 = hh'^2+(g'h'-gh)^2,$$
$$4Gh^2 = hh'^2+(g'h'+gh)^2$$

und daher $gg' <$ oder $> 2Gh$, jenachdem die Punkte g und g' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der gegebenen Linie liegen.

(Vorbemerkung zum zweiten Bruchstück von Herrn *O. Hermes*.)

Zur Vermittelung der Schlussfolgerungen, welche *Jacobi* an die in dem Folgenden entwickelte Aufgabe anknüpft, ist Einzelnes vorweg in Betracht zu ziehen.

Die Gleichung einer auf ihre Hauptachsen bezogenen Fläche

$$(1.) \quad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1$$

stellt ein Ellipsoid, ein einflächiges Hyperboloid oder ein zweiflächiges Hyperboloid dar, jenachdem die Grössen m^2, n^2, p^2 sämmtlich positiv, oder zwei derselben positiv und die dritte negativ, oder nur eine einzige positiv und die beiden übrigen negativ sind: ferner werden durch die Gleichung

$$(2.) \quad \frac{x^2}{m^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{n^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{p^2-\lambda^2} = 1$$

bekanntlich für verschiedene positive oder negative Werthe von λ^2 die sämmtlichen Flächen eines der Fläche (1.) confocalen Systems dargestellt, und zwar für die besonderen Annahmen $\lambda^2 = m^2$, $= n^2$ oder $= p^2$ die einzelnen Grenzfälle, welche durch die (reellen oder imaginären) Focalcurven bestimmt sind.

Wegen der Bedeutung, welche gerade diese Grenzfälle für unsere Aufgabe haben, möge ein Beispiel durchgeführt werden. Nimmt man die Grössen m^2, n^2, p^2 als positiv an und zwar $m > n > p$, so stellt die Gleichung (2.) für den Werth $\lambda^2 = p^2$, wenn gleichzeitig $z = 0$ ist, weil das Glied $\frac{z^2}{p^2-\lambda^2}$ alsdann den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt und als positiv oder negativ betrachtet werden kann, verschiedene Räume der xy-Ebene dar. Jenachdem man nämlich, unter Zugrundelegung stetig wachsender Werthe von λ^2, den besonderen Werth p^2 dieser Grösse als die Reihe der confocalen Ellipsoide, welche den Werthen von $\lambda^2 < p^2$ entsprechen, beschliessend, oder die Reihe der confocalen einflächigen Hyperboloide, welche den Werthen $\lambda^2 > p^2$ und $< n^2$ zugehören, beginnend ansieht, entsprechen der Gleichung (2.) entweder die sämmtlichen Punkte der xy-Ebene innerhalb oder ausserhalb der Focalellipse

$$\frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2} = 1, \quad z = 0,$$

so dass man im Anschluss an die *Jacobi*sche Einführung der Namen Grenzellipse oder Grenzhyperbel in der Ebene, den durch die Gleichung (2.) für den Fall $\lambda^2 = p^2$ und

$z=0$ ausgedrückten Theil der xy-Ebene Grenzellipsoid oder Grenzhyperboloid nennen kann, jenachdem man dem Gliede $\frac{z^2}{p^2-\lambda^2}$ ein positives oder negatives Zeichen beilegt.

Ebenso werden durch die Gleichung (2.) für die Annahme $\lambda^2=n^2$, $y=0$ die sämmtlichen Punkte der xz-Ebene dargestellt, und zwar wenn man dem Gliede $\frac{y^2}{\lambda^2-n^2}=\frac{0}{0}$ positive Werthe beilegt, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2-p^2}<1$$

die sämmtlichen Punkte innerhalb der Focalhyperbel, und wenn das unbestimmte Glied $\frac{y^2}{\lambda^2-n^2}=\frac{0}{0}$ ein negatives Zeichen erhält, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{x^2}{m^2-n^2}-\frac{z^2}{n^2-p^2}>1$$

alle Punkte der xz-Ebene, welche vom Mittelpunkte aus gerechnet jenseits der Focalhyperbel liegen. Die Annahme endlich $\lambda^2=m^2$, $x=0$ ergiebt die sämmtlichen Punkte der yz-Ebene, und zwar wenn man das alsdann unbestimmte Glied $\frac{x^2}{\lambda^2-m^2}$ als positiv annimmt, vermöge der Ungleichheit

$$\frac{y^2}{m^2-n^2}+\frac{z^2}{m^2-p^2}>1$$

alle Punkte dieser Ebene, während die negativen Werthe des unbestimmten Gliedes $\frac{x^2}{\lambda^2-m^2}$ keine geometrische Bedeutung mehr zulassen.

Wendet man nun das *Ivory*sche Theorem, „dass die Verbindungslinie beliebiger zwei auf confocalen Flächen zweiten Grades liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Flächen conjugirten Punkte ist", auf die Fläche (1.) und einen der Grenzfälle der Fläche (2.) an und zwar in der Weise, dass man auf der letzteren, z. B. im Innern der Focalellipse, drei beliebige Punkte A', B', C' annimmt, welchen auf der Fläche (1.) als conjugirt die Punkte A, B, C zugehören, die ersteren als Eckpunkte der Basis einer dreiseitigen Pyramide $A'B'C'P$, die letzteren als Eckpunkte der Basis einer zweiten dreiseitigen Pyramide $ABCQ$ *), deren Spitzen P und Q ebenfalls conjugirte Punkte, bezüglich auf den Flächen (1.) und (2.), sind: wenn jetzt die Spitze Q die Grenzfläche (2.), d. h. die Ebene der Focalellipse, durchläuft, so beschreibt die Spitze P der ersten Pyramide die Fläche (1.). Von dieser Betrachtung ausgehend giebt *Jacobi* (Cr. J. Bd. XII, pag. 139) seine allgemeine Erzeugungsart der Flächen des zweiten Grades, wie folgt:

„Werden im Raume irgend drei feste Punkte A', B', C' und irgend drei andere, jenen beziehlich entsprechende, feste Punkte A, B, C angenommen und werden in Rücksicht auf diese Fundamentalpunkte andere entsprechende Punkte P, Q so bestimmt, dass ihre Abstände von jenen respective gleich sind, d. h. dass

$$PA'=QA,\quad PB'=QB,\quad PC'=QC,$$

so hat man ein Correlativsystem, worin der Punkt P irgend eine Fläche zweiten Grades beschreibt, wenn der Punkt Q sich in einer Ebene bewegt."

Auf diesen allgemeinen Satz beziehen sich die am Schlusse des zweiten Bruchstücks befindlichen Entwicklungen *Jacobi*s.

Wenn im Besonderen die Eckpunkte der ersten Basis A', B', C' auf dem Umfange eines Focalkegelschnitts, z. B. der Focalellipse, liegen, so sind die Eckpunkte

*) Es ist hier die Bezeichnung eingeführt, welche *Jacobi* in dem zweiten Bruchstück festhält.

A, B, C der zweiten Basis die conjugirten Punkte auf dem xy-Schnitt des Ellipsoids (1.), wenn wir auch hier die Annahme $m > n > p$ festhalten. In der eben angegebenen Erzeugungsweise tritt alsdann nur die Aenderung ein, dass die Ebene, welche der Punkt Q durchläuft, mit der Ebene der Basis ABC zusammenfällt, d. h. dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCQ$ für alle Lagen des Punktes Q verschwindet. Die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' sind nunmehr zugleich conjugirte Punkte confocaler Kegelschnitte, beispielsweise der beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1, \quad z=0,$$

$$\frac{x^2}{m^2-p^2}+\frac{y^2}{n^2-p^2}=1, \quad z=0,$$

und es stimmen die Hauptachsen eines dieser Kegelschnitte der Länge und Lage nach überein mit den Hauptachsen eines Hauptschnitts der durch den Punkt P beschriebenen Fläche (1.), während durch die Differenz der Quadrate der entsprechenden Halbachsen der beiden Kegelschnitte zugleich das Quadrat der zu dem entsprechenden Hauptschnitte senkrechten Halbachse der Fläche (1.) bestimmt wird.

Es kommt demnach die Aufgabe, die Art der von der Spitze P erzeugten Fläche zu bestimmen, wenn die beiden Basen ABC und $A'B'C'$ gegeben sind, und der dem Punkte P conjugirte Punkt, d. h. für welchen nach dem *Ivory*schen Theorem

$$PA' = QA, \quad PB' = QB, \quad PC' = QC,$$

die Ebene des Dreiecks ABC durchläuft, hinaus auf die Lösung der Aufgabe, mit welcher das folgende Bruchstück beginnt.

Zweites Bruchstück.

Um zwei beliebige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ Kegelschnitte zu beschreiben, welche gleiche Excentricität haben, und in welchen A und A', B und B', C und C' conjugirte Punkte sind.

Wenn in zwei ebenen Figuren sich je zwei Punkte so entsprechen, dass ihre Abscissen sich wie $m:m'$ und ihre Ordinaten wie $n:n'$ verhalten, so verhält sich der Inhalt eines zwischen drei Punkten der einen Figur beschriebenen Dreieckes zum Inhalt des zwischen den entsprechenden Punkten der andern Figur beschriebenen Dreieckes wie $mn:m'n'$. Sind daher die auf die Hauptachsen bezogenen Gleichungen der beiden gesuchten Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{mm}+\frac{y^2}{nn}=1, \qquad \frac{x^2}{m'm'}+\frac{y^2}{n'n'}=1,$$

so hat man:

$$ABC:A'B'C' = mn:m'n'.$$

Aus demselben Grunde hat man, wenn man O und O' die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte nennt,

$$\frac{O'B'C'}{OBC}=\frac{O'C'A'}{OCA}=\frac{O'A'B'}{OAB}=\frac{m'n'}{mn},$$

und daher

$$OBC : OCA : OAB = O'B'C' : O'C'A' : O'A'B'.$$

Der Punkt O wird der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, wenn man an diesen den Dreiecken OBC, OCA, OAB proportionale Gewichte anbringt. Ebenso wird O' der Schwerpunkt der Punkte A', B', C', wenn man an ihnen den Dreiecken $O'B'C'$, $O'C'A'$, $O'A'B'$ proportionale Gewichte anbringt. *Die Gewichte, welche man an A, B, C anzubringen hat, um den Punkt O zum Schwerpunkt zu erhalten, können daher den Gewichten gleich gesetzt werden, welche man an A', B', C' anzubringen hat, um den Punkt O' zu ihrem Schwerpunkt zu erhalten.*

Die an A, B, C angebrachten Gewichte mögen α, β, γ heissen, und ihre Summe μ, so wird die Entfernung eines beliebigen Punktes P vom Schwerpunkt O durch die bekannte Formel:

$$\mu . PO^2 = \alpha . PA^2 + \beta . PB^2 + \gamma . PC^2 - \frac{1}{\mu} \{\beta\gamma . BC^2 + \gamma\alpha . CA^2 + \alpha\beta . AB^2\}$$

gegeben.

Ebenso wird die Entfernung eines Punktes P' von O' durch die Formel:

$$\mu . P'O'^2 = \alpha . P'A'^2 + \beta . P'B'^2 + \gamma . P'C'^2 - \frac{1}{\mu} \{\beta\gamma . B'C'^2 + \gamma\alpha . C'A'^2 + \alpha\beta . A'B'^2\}$$

gegeben. Sind P und P' zwei conjugirte Punkte, und ist

$$p^2 = m^2 - m'^2 = n^2 - n'^2,$$

so hat man auch

$$p^2 = PO^2 - P'O'^2,$$

und daher, wenn man die angegebenen Werthe von μPO^2 und $\mu P'O'^2$ substituirt und der Kürze halber

$$BC^2 - B'C'^2 = u, \quad CA^2 - C'A'^2 = v, \quad AB^2 - A'B'^2 = w$$

setzt,

$$\mu p^2 = \alpha(PA^2 - P'A'^2) + \beta(PB^2 - P'B'^2) + \gamma(PC^2 - P'C'^2) - \frac{1}{\mu} \{\beta\gamma . u + \gamma\alpha . v + \alpha\beta . w\}.$$

Lässt man P nach und nach mit A, B, C und gleichzeitig P' mit A', B', C' zusammenfallen, so giebt diese Formel die Gleichungen:

$$\mu p^2 + \frac{1}{\mu}(\beta\gamma . u + \gamma\alpha . v + \alpha\beta . w) = \beta w + \gamma v = \gamma u + \alpha w = \alpha v + \beta u.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Gewichte α, β, γ den Grössen $u(v+w-u)$, $v(w+u-v)$, $w(u+v-w)$ proportional sind. Setzt man sie diesen Grössen *gleich*, so folgen aus den Werthen

$$u(v+w-u) = \alpha, \quad v(w+u-v) = \beta, \quad w(u+v-w) = \gamma$$

die Gleichungen,

$$\mu = 2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2,$$
$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w) = 2uvw;$$

ferner

$$\beta\gamma.u+\gamma\alpha.v+\alpha\beta.w = uvw[u^2+v^2+w^2-(v-w)^2-(w-u)^2-(u-v)^2] = uvw\mu$$

und hieraus

$$p^2 = \frac{uvw}{\mu}.$$

Wir haben daher den Satz:

Wenn zwei den beliebig gegebenen Dreiecken ABC und A'B'C' umschriebene Kegelschnitte gleiche Excentricität haben, und in ihnen A und A', B und B', C und C' conjugirte Punkte sind, so erhält man ihre Mittelpunkte O und O' als die Schwerpunkte von A, B, C und von A', B', C', wenn man in diesen drei Punkten respective die Gewichte

$$u(v+w-u), \quad v(w+u-v), \quad w(u+v-w)$$

anbringt, wo

$$u = BC^2-B'C'^2, \quad v = CA^2-C'A'^2, \quad w = AB^2-A'B'^2$$

ist, und es wird die Differenz der Quadrate der halben grossen oder der halben kleinen Achsen der Kegelschnitte:

$$\frac{uvw}{2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2}.$$

Nimmt man in jedem der beiden Kegelschnitte die beiden Hauptachsen zu Coordinatenachsen und setzt die Coordinaten von B und C

$$m\cos\eta, \quad n\sin\eta \quad \text{und} \quad m\cos\vartheta, \quad n\sin\vartheta,$$

so werden die Coordinaten von B' und C'

$$m'\cos\eta, \quad n'\sin\eta \quad \text{und} \quad m'\cos\vartheta, \quad n'\sin\vartheta;$$

hieraus folgt, da $m^2-m'^2 = n^2-n'^2 = p^2$,

$$u = BC^2-B'C'^2 = p^2((\cos\eta-\cos\vartheta)^2+(\sin\eta-\sin\vartheta)^2)$$
$$= 2p^2(1-\cos(\eta-\vartheta)) = 4p^2\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}.$$

Nennt man Δ den Inhalt des gegebenen Dreieckes ABC, so wird der Inhalt des Dreieckes OBC gleich $\frac{\alpha\Delta}{\mu}$. Andrerseits wird der Inhalt desselben Dreiecks

$$\pm\tfrac{1}{2}mn\sin(\eta-\vartheta)$$

und daher

$$\frac{\alpha^2\Delta^2}{m^2n^2\mu^2} = \tfrac{1}{4}\sin^2(\eta-\vartheta);$$

dividirt man diese Gleichung durch

$$\frac{u}{4p^2} = \sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2},$$

so erhält man:

$$\frac{4p^2\Delta\alpha^2}{m^2n^2\mu^2u} = \cos^2\frac{\eta-\vartheta}{2}$$

und daher

$$\frac{4p^2\Delta^2\alpha^2}{m^2n^2\mu^2u} = 1-\frac{u}{4p^2}.$$

Quadrirt man den Werth von $\alpha = u(v+w-u)$ und vergleicht den für μ gefundenen Werth, so ergiebt sich

$$\alpha^2 = u^2(4vw-\mu) = 4u^2vw\left(1-\frac{u}{4p^2}\right).$$

Die vorstehende Gleichung verwandelt sich daher nach Division durch $1-\frac{u}{4p^2}$ in die folgende:

$$\frac{16p^2\Delta^2uvw}{m^2n^2\mu^2} = \frac{16\Delta^2u^2v^2w^2}{m^2n^2\mu^2} = 1\ ^*).$$

Nennt man Δ' den Inhalt des Dreieckes $A'B'C'$, so erhält man eine ganz analoge Gleichung. Aus den beiden so gefundenen Gleichungen

$$m^2n^2 = \frac{16u^2v^2w^2}{\mu^2}\Delta^2 = \frac{16p^4}{\mu}\Delta^2,$$

$$m'^2n'^2 = \frac{16u^2v^2w^2}{\mu^2}\Delta'^2 = \frac{16p^4}{\mu}\Delta'^2$$

folgt, wenn man abzieht und durch p^2 dividirt:

$$m^2+n^2-p^2 = \frac{16p^2}{\mu}(\Delta^2-\Delta'^2)$$

und daher

$$m^2+n^2 = \frac{16p^2}{\mu}\left(\Delta^2-\Delta'^2+\frac{\mu}{16}\right).$$

Hieraus folgt die vierte Potenz der halben Excentricität beider Kegelschnitte:

$$(m^2-n^2)^2 = \frac{256p^4}{\mu^2}(\Delta^2-\Delta'^2)^2-\frac{32p^4}{\mu}(\Delta^2+\Delta'^2)+p^4$$

oder

$$\frac{\mu^2(m^2-n^2)^2}{p^4} = (16(\Delta^2+\Delta'^2)-\mu)^2-1024\Delta^2\Delta'^2$$
$$= (16(\Delta+\Delta')^2-\mu)(16(\Delta-\Delta')^2-\mu).$$

---

*) Die Herleitung dieser Gleichung wäre nur dann unstatthaft, wenn $u=v=w=4p^2$. Wenn $u=v=w$, wird aber $\mu=3u^2$, $p^2=\frac{1}{3}u$, es müsste also $u=v=w=0$ sein, oder beide Dreiecke congruent werden, in welchem Falle die ganze Aufgabe unstatthaft ist. *J.*

Man erhält aber auch einen merkwürdigen Ausdruck, wenn man d vorstehende Grösse durch die unmittelbar gegebenen Seiten der Dreiec ABC und $A'B'C'$ darstellt. Es sei

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$
$$B'C' = a', \quad C'A' = b', \quad A'B' = c',$$

so wird

$$16\Delta^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$
$$16\Delta'^2 = 2(b'^2c'^2 + c'^2a'^2 + a'^2b'^2) - a'^4 - b'^4 - c'^4,$$
$$\mu = \begin{cases} 2\,|(b^2-b'^2)(c^2-c'^2)+(c^2-c'^2)(a^2-a'^2)+(a^2-a'^2)(b^2-b'^2)| \\ -(a^2-a'^2)^2-(b^2-b'^2)^2-(c^2-c'^2)^2 \end{cases}$$

und daher

$$16\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right) = 2\,|a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)|.$$

Bemerkt man die Formeln

$$(b^2+c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2-16\Delta^2,$$
$$(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = a^4-b^4-c^4+2b^2c^2 = 16\Delta^2-2a^2(b^2+c^2-a^2)$$

und die ähnlichen, so erhält man

$$256\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right)^2 - 1024\,\Delta^2\Delta'^2$$
$$= \begin{cases} 16(a'^4b^2c^2+b'^4c^2a^2+c'^4a^2b^2) \\ -16\,|b'^2c'^2a^2(b^2+c^2-a^2)+c'^2a'^2b^2(c^2+a^2-b^2)+a'^2b'^2c^2(a^2+b^2-c^2)|. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze halber

$$b^2c'^2-c^2b'^2 = \mathfrak{A}, \quad c^2a'^2-a^2c'^2 = \mathfrak{B}, \quad a^2b'^2-b^2a'^2 = \mathfrak{C},$$

so kann man dem vorstehenden Ausdruck folgende elegante Form geben

$$\mu^4\frac{(m^2-n^2)^2}{u^2v^2w^2} = -16(\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Aus der ganzen Natur der Aufgabe geht hervor, dass die vorstehend Grösse positiv ist. Man sieht es aber nicht so leicht aus der Art, wie di selbe zusammengesetzt ist, daher ich dies kurz beweisen will.

Man setze $\frac{b^2}{b'^2}-\frac{c^2}{c'^2} = d$, $\frac{c^2}{c'^2}-\frac{a^2}{a'^2} = d'$, $\frac{a^2}{a'^2}-\frac{b^2}{b'^2} = d''$,

so hat man $d+d'+d'' = 0$, ferner

$$\mathfrak{A} = b'^2c'^2d, \quad \mathfrak{B} = c'^2a'^2d', \quad \mathfrak{C} = a'^2b'^2d''$$

und daher:

$$\mathfrak{BC}+\mathfrak{CA}+\mathfrak{AB} = a'^2b'^2c'^2(a'^2d'd''+b'^2d''d+c'^2dd').$$

Es ist daher zu beweisen, dass der in Klammern eingeschlossene Ausdruck immer negativ ist. Da $d+d'+d''=0$, so müssen zwei der Grössen dasselbe Zeichen haben, während die dritte Grösse das entgegengesetzte Zeichen hat. Haben z. B. d' und d'' dasselbe Zeichen, so sieht man, dass die in Klammern eingeschlossene Grösse negativ wird, wenn man ihr die Form giebt:

$$d'd''(a'^2-b'^2-c'^2)-b'^2d''^2-c'^2d'^2 = -d'd''((b'+c')^2-a'^2)-(b'd''-c'd')^2,$$

da immer von den drei Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ die Summe von zweien $b'+c'$ grösser als die dritte a', also $(b'+c')^2-a'^2$ positiv ist.

Wenn $m^2-n^2=m'^2-n'^2=0$, so muss man $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ haben, oder: *sollen die Kegelschnitte Kreise werden, so müssen die Dreiecke ABC und A'B'C' einander ähnlich sein.*

Aus den Gleichungen:

$$16\left(\Delta^2+\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right) = 2\,|a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)|$$
$$= 2\,|a^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2(c'^2+a'^2-b'^2)+c^2(a'^2+b'^2-c'^2)|.$$
$$16\Delta^2 = a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2),$$
$$16\Delta'^2 = a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)+c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)$$

folgt

$$\mu\frac{(m^2+n^2)}{2p^2} = 8\left(\Delta^2-\Delta'^2+\frac{\mu}{16}\right)$$
$$= u(b^2+c^2-a^2)+v(c^2+a^2-b^2)+w(a^2+b^2-c^2),$$
$$\mu\frac{(m'^2+n'^2)}{2p^2} = 8\left(\Delta^2-\Delta'^2-\frac{\mu}{16}\right)$$
$$= u(b'^2+c'^2-a'^2)+v(c'^2+a'^2-b'^2)+w(a'^2+b'^2-c'^2).$$

Wenn μ und u, v, w positiv sind, müssen diese beiden Ausdrücke ebenfalls positiv werden, was von dem ersten zu beweisen hinreicht. Wenn die drei Grössen $b^2+c^2-a^2$, $c^2+a^2-b^2$, $a^2+b^2-c^2$ positiv sind, erhellt dies von selbst. Es kann aber eine der drei Grössen, z. B. $b^2+c^2-a^2$, negativ werden. In diesem Falle stelle man den Ausdruck so dar:

$$u(b^2+c^2-a^2)+v(c^2+a^2-b^2)+w(a^2+b^2-c^2)$$
$$= 2(vc^2+wb^2)-(a^2-b^2-c^2)(u-v-w),$$

wodurch man sieht, dass er positiv ist, wenn $u<v+w$. Ist $u>v+w$, so hat man doch $u-v-w<2\sqrt{vw}$, denn damit

$$\mu = (\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w})(\sqrt{v}+\sqrt{w}-\sqrt{u})(\sqrt{w}+\sqrt{u}-\sqrt{v})(\sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w})$$

positiv sei, muss von den drei Grössen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ eine immer kleiner als die Summe der beiden andern sein. Ebenso hat man, wenn $a^2 > b^2 + c^2$, doch $a^2 - b^2 - c^2 < 2bc$ und daher $(a^2 - b^2 - c^2)(u - v - w) < 4bc\sqrt{vw}$. Da nun $2(vc^2 + wb^2) > 4bc\sqrt{vw}$, so wird der vorgelegte Ausdruck immer positiv. Man leitet hieraus leicht die Folgerung ab, dass die Grössen m^2 und n^2 nie zugleich negativ werden können.

Wenn μ positiv ist, so müssen die Seiten des Dreiecks ABC alle grösser oder alle kleiner sein als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$. Ferner müssen die Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten beider Dreiecke, oder die Grössen u, v, w, so beschaffen sein, dass man $\sqrt{\pm u}$, $\sqrt{\pm v}$, $\sqrt{\pm w}$ zu Seiten eines Dreiecks nehmen könne, welches ich $A''B''C''$ nennen und dessen Inhalt ich mit Δ'' bezeichnen will. Man kann mit Hilfe dieses Dreiecks mehrere der angegebenen Formeln elegant construiren. Zuerst wird

$$\mu = 16\Delta'\Delta'',$$

ferner, da $p = \frac{\sqrt{uvw}}{4\Delta''}$, *so wird p gleich dem Radius des dem Dreieck A″B″C″ umschriebenen Kreises. Die Gewichte* α, β, γ verhalten sich ferner, wie die Sinus der doppelten Winkel des Dreiecks $A''B''C''$, oder *verhalten sich wie die Gewichte an den Ecken des Dreiecks A″B″C″, deren Schwerpunkt der Mittelpunkt des diesem umschriebenen Kreises ist.*

Man hat ferner

$$\frac{p^2}{\Delta''} = \frac{mn}{\Delta} = \frac{m'n'}{\Delta'},$$

$$\frac{\Delta''^4 (m^2 - n^2)^2}{p^4} = (\Delta + \Delta' + \Delta'')(\Delta + \Delta' - \Delta'')(\Delta - \Delta' + \Delta'')(\Delta - \Delta' - \Delta'').$$

Diese letzte Formel lehrt, *dass unter den Dreiecken* Δ, Δ', Δ'' *eins grösser als die Summe der beiden andern sein muss.* Die Combination beider Formeln führt auf die Gleichung:

$$p^4 (m^2 - n^2)^2 = (mn + m'n' + pp)(mn + m'n' - pp)(mn - m'n' + pp)(mn - m'n' - pp),$$

welche durch die Substitution der Werthe $m'^2 = m^2 - p^2$, $n'^2 = n^2 - p^2$ identisch wird.

Aus den Gleichungen

$$m^2 n^2 = \frac{16 u^2 v^2 w^2 \Delta^2}{\mu^2}, \qquad m'^2 n'^2 = \frac{16 u^2 v^2 w^2 \Delta'^2}{\mu^2}$$

folgt, *dass die beiden Kegelschnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind, jenachdem* μ *positiv oder negativ ist.* Denn es tritt das eine oder das andere ein,

jenachdem m^2n^2 positiv oder negativ ist. Die vorstehenden Constructionen gelten daher für den Fall, dass die Kegelschnitte Ellipsen sind, und umgekehrt: *es werden die Kegelschnitte Ellipsen, wenn das Hilfsdreieck $A''B''C''$ reell wird.*

Ich will das im Vorstehenden für die Beschaffenheit der Kegelschnitte gefundene Kennzeichen noch auf eine andere Art beweisen, und zwar vermittelst eines schönen Satzes, welchen *Steiner* im XCIX^ten^ Bande des in Rom erscheinenden Giornale Arcadico bekannt gemacht hat*). Wenn man nämlich um ein Dreieck ABC einen Kegelschnitt beschreibt, dessen Mittelpunkt ein gegebener Punkt O ist, und das Dreieck $MM'M''$, dessen Ecken die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC sind, construirt, so wird zufolge dieses Satzes der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn O im Innern des Dreiecks $MM'M''$ liegt oder in einem der drei unendlichen Räume, die an einer der Ecken des Dreiecks $MM'M''$ von den Verlängerungen seiner zwei dort zusammenstossenden Seiten eingeschlossen werden; wenn dagegen der Mittelpunkt O in einem der drei unendlichen Räume liegt, welche von einer der Seiten des Dreiecks und den Verlängerungen der beiden andern umschlossen werden, so wird der Kegelschnitt eine Hyperbel. Ist O als Schwerpunkt der drei Punkte A, B, C gegeben, wenn man in ihnen die Gewichte α, β, γ anbringt, und sind M, M', M'' die Mitten der Seiten BC, CA, AB, so wird O auch der Schwerpunkt der Punkte M, M', M'', wenn man in ihnen die Gewichte

$$\alpha' = \beta+\gamma-\alpha, \quad \beta' = \gamma+\alpha-\beta, \quad \gamma' = \alpha+\beta-\gamma$$

anbringt. Haben diese drei Gewichte α', β', γ' dasselbe Zeichen, so fällt ihr Schwerpunkt O in das Innere des Dreiecks $MM'M''$. Haben zwei Gewichte, z. B. β' und γ', dasselbe Zeichen, aber das dritte Gewicht α' das entgegengesetzte, so fällt O entweder in den bei M oder in den über $M'M''$ gebildeten unendlichen Raum, jenachdem $\alpha'+\beta'+\gamma'$ dasselbe Zeichen wie α' oder wie β' und γ' hat. Man kann daher sagen, dass der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel wird, jenachdem $\alpha'+\beta'+\gamma'$ dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen wie $\alpha'\beta'\gamma'$ hat, oder man hat den Satz:

Wenn ein Kegelschnitt durch drei mit den Gewichten α, β, γ behaftete Punkte geht und ihren Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, so wird der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem die Grösse

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

positiv oder negativ ist.

*) Wieder abgedruckt im 30ten Bande von *Crelles* Journal p. 97.

Für die oben (S. 414) angegebenen Werthe von α, β, γ wird

$$\alpha' = \beta + \gamma - \alpha = (u+v-w)(u-v+w) = \frac{\Delta\gamma}{vw},$$

$$\beta' = \gamma + \alpha - \beta = (v+w-u)(v-w+u) = \frac{\Gamma u}{uw},$$

$$\gamma' = \alpha + \beta - \gamma = (w+u-v)(w-u+v) = \frac{u\beta}{uv}.$$

Da das Product dieser drei Grössen immer positiv ist, so hat das Product der vier Grössen in dem eben bewiesenen Satze dasselbe Zeichen wie $\alpha+\beta+\gamma=\mu$, und es wird daher der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem μ positiv oder negativ ist. Man kann noch bemerken, dass der Punkt O nie in die Seiten des Dreiecks $MM'M''$ oder in ihre Verlängerungen fallen kann, wenn er nicht einer der Punkte M, M', M'' selber wird; denn es müsste in jenem Falle eins der Gewichte in den Punkten M, M', M'' zufolge der Beschaffenheit der Werthe dieser Gewichte verschwinden, welches aber nicht möglich ist, ohne dass noch ein anderes Gewicht verschwindet, in welchem Falle der Schwerpunkt mit dem dritten Punkte zusammenfällt. Wird z. B. $v+w-u=0$, so verschwinden β', γ', α; es wird ferner $\beta=\gamma=2vw$, $\mu=4vw$,

$$p^2 = \tfrac{1}{4}u, \qquad m^2+n^2 = u\left(\frac{c^2}{w}+\frac{b^2}{v}\right), \qquad m^2n^2 = \frac{u^2\Delta}{4vw}.$$

Die Kegelschnitte bleiben in diesem Falle bei unserer Aufgabe vollkommen bestimmt, obgleich im Allgemeinen die Aufgabe, einen Kegelschnitt mit gegebenem Mittelpunkt einem gegebenen Dreieck zu umschreiben, *unbestimmt* wird, wenn der gegebene Mittelpunkt in die Mitte einer der Seiten des Dreiecks fällt. Der hier betrachtete Fall tritt ein, *wenn das Hilfsdreieck $A''B''C''$ rechtwinklig ist.*

Setzt man wieder, wie oben, die Coordinaten der Punkte B und C gleich

$$m\cos\eta, \quad n\sin\eta \quad \text{und} \quad m\cos\vartheta, \quad n\sin\vartheta,$$

so wird die Tangente des Winkels, welchen BC mit der grossen Achse bildet,

$$\frac{n(\sin\eta-\sin\vartheta)}{m(\cos\eta-\cos\vartheta)} = \frac{n}{m}\,\frac{\sin\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right)}{\cos\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right)}.$$

Der Punkt D, in welchem der mit BC parallele Durchmesser den Kegelschnitt trifft, hat daher die Coordinaten:

$$m\cos\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right), \qquad n\sin\left(\frac{\eta+\vartheta}{2}+90^\circ\right),$$

und es wird

$$OD^2 = m^2 \sin^2\frac{\eta+\vartheta}{2} + n^2\cos^2\frac{\eta+\vartheta}{2} = \frac{BC^2}{\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}} = \frac{a^2}{\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2}}.$$

Substituirt man hierin den Werth für $\sin^2\frac{\eta-\vartheta}{2} = \frac{u}{4p^2} = \frac{\mu}{4vw}$ und bildet die beiden andern ähnlichen Formeln, so findet man für die Quadrate der den Seiten BC, CA, AB parallelen halben Durchmesser die Werthe:

$$\frac{vwa^2}{\mu}, \quad \frac{wub^2}{\mu}, \quad \frac{uvc^2}{\mu}.$$

Ebenso werden die Quadrate der den Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ parallelen halben Durchmesser

$$\frac{vwa'^2}{\mu}, \quad \frac{wub'^2}{\mu}, \quad \frac{uvc'^2}{\mu},$$

und die Differenz je zweier entsprechenden Grössen wird

$$\frac{uvw}{\mu} = p^2. \quad -$$

Die beiden Kegelschnitte sind im Allgemeinen schon durch drei ihrer Punkte A, B, C, A', B', C', und durch ihre Mittelpunkte O und O' vollkommen bestimmt. Legt man ihre Mittelpunkte und grossen Achsen in einander, so erhält man diejenige Lage, in welcher ihre beiden Brennpunkte zusammenfallen, auf welche sich unsere ursprüngliche Betrachtung bezog. In dieser Lage wird nach dem *Ivory*schen Theorem

$$BC' = CB', \quad CA' = AC', \quad AB' = BA'.$$

Es ist also durch die angestellten Untersuchungen auch die Aufgabe gelöst:

Zwei beliebige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in solche gegenseitige Lage zu bringen, dass $BC' = CB'$, $CA' = AC'$, $AB' = BA'$ wird.

Setzt man nämlich, wie oben,

$$BC^2 - B'C'^2 = u, \quad CA^2 - C'A'^2 = v, \quad AB^2 - A'B'^2 = w,$$

und bringt in A, B, C und ebenso in A', B', C' die Gewichte

$$u(v+w-u), \quad v(w+u-v), \quad w(u+v-w)$$

an, deren Schwerpunkte O und O' seien, so sucht man die grossen Achsen der beiden Kegelschnitte, die den Dreiecken ABC, $A'B'C'$ umschrieben sind und respective O und O' zu Mittelpunkten haben. Denkt man sich die Punkte

O und O' und diese grossen Achsen in den Dreiecken fest und legt sie auf einander, so erhalten die Dreiecke die verlangte Lage. —

Eine besondere Betrachtung macht der Fall nothwendig, wenn zwei correspondirende Seiten der beiden Basisdreiecke einander gleich sind. Denn die Analysis, durch welche oben die Gewichte α, β, γ und der Werth von p^2 gefunden wurden, setzt voraus, dass keine der Grössen u, v, w verschwinde. Es sei z. B. $BC = B'C'$, also $u = 0$, so geben die gefundenen Formeln

$$u = 0, \quad \alpha = 0, \quad p^2 = 0,$$

$$\beta = -v(v-w), \quad \gamma = w(v-w), \quad \mu = -(v-w)^2.$$

Die Verhältnisse von m^2, n^2, p^2 bleiben endlich. Die Punkte O und O' kommen in die Linien BC und $B'C'$ selbst zu liegen. Lässt man B mit B', C mit C' zusammenfallen, so fällt auch O in O'. Man findet dann diesen Punkt durch eine leichte Construction, indem man auf AA' in der Mitte von AA' ein Perpendikel errichtet, dessen Durchschnitt mit der Linie $B'C'$ den Punkt O giebt. Die beiden Kegelschnitte verwandeln sich in die Systeme zweier geraden Linien, von denen die eine BC, die beiden anderen OA und OA' sind. Die Oberfläche wird ein Kegel *), dessen Spitze O' und dessen Focallinien $O'A'$ und $B'C'$ sind. Dreht man das System der Linien OA, OB mit unverändertem Winkel um O nach OA' zu um den halben Winkel AOA', so erhält man die beiden Linien, in denen der Kegel von der Hauptebene $A'B'C'$ geschnitten wird, durch welche nebst den Brennlinien der Kegel bestimmt ist.

Wenn gleichzeitig $u = 0$, $v = w$, erhält man

$$\beta + \gamma = \alpha, \quad p^2 = \tfrac{1}{4}v.$$

Eine der Grössen m^2 und n^2 wird unendlich, während die andere endlich bleibt. Nimmt man an, dass m unendlich wird, so giebt die aus den oben allgemein gefundenen Werthen folgende Gleichung

$$\frac{m^2n^2}{m^2+n^2-p^2} = \frac{p^2\Delta^2}{\Delta^2-\Delta'^2}$$

für den besonderen Fall

$$n^2 = \frac{p^2\Delta^2}{\Delta^2-\Delta'^2} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{v\Delta^2}{\Delta^2-\Delta'^2}.$$

---

*) Es wird hierbei als bekannt vorausgesetzt, dass die Lage der Focallinien des Kegels, sowie derjenigen Linien, in welchen die erweiterte Ebene derselben den Kegel durchschneidet, eine derartige ist, dass sie dieselben Halbirungslinien haben, und dass jede zwei conjugirte Punkte auf diesen Linien von ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte gleichweit entfernt sind. *H.*

Lässt man wieder B und C in B' und C' fallen, so ist AA' senkrecht auf $B'C'$; trifft AA' die Linie $B'C'$ in H', so hat man

$$v = AH'^2 - A'H'^2,$$

$$\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \Delta'^2} = \frac{AH'^2}{v}$$

und daher

$$n^2 = \tfrac{1}{4} AH'^2.$$

Die Fläche ist ein Cylinder*), dessen Kante durch den Punkt N', die Mitte von $A'H'$, geht und mit $B'C'$ parallel ist. Die Basis des Cylinders wird ein Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$\frac{4y^2}{AH'^2} + \frac{4z^2}{AH'^2 - A'H'^2} = 1,$$

wo die Achse der y senkrecht auf $B'C'$ steht und immer die *grosse* Achse der Basis des Cylinders wird, die eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem A mehr oder weniger als A' von der Linie $B'C'$ entfernt ist. Die Punkte N' und A', H' werden der Mittelpunkt und die Brennpunkte dieser Basis. —

Die Fläche wird ein *Ellipsoid*, wenn m^2, n^2, p^2 positiv werden, also wenn μ, u, v, w positiv sind. Sie wird ein *continuirliches Hyperboloid*, wenn eine der Grössen m^2, n^2, p^2 negativ wird, während die andern positiv bleiben; also

a) wenn m^2 und n^2 positiv sind, also auch μ positiv ist, und wenn p^2 negativ ist, also u, v, w negativ sind;

b) wenn $m^2 n^2$ negativ ist, also μ negativ und p^2 positiv, also eine der Grössen u, v, w negativ ist, während die beiden andern positiv sind, oder alle drei u, v, w negativ sind, und von den Grössen $\sqrt{-u}$, $\sqrt{-v}$, $\sqrt{-w}$ eine grösser als die Summe der beiden andern ist.

Die Fläche wird ein *Hyperboloid mit zwei Flächen*, wenn eine der Grössen m^2, n^2, p^2 positiv ist, und die beiden andern negativ werden; also wenn $m^2 n^2$ und p^2 negativ werden, da m^2 und n^2, wie wir gesehen haben, nicht gleichzeitig negativ werden können. Dies erfordert die Bedingungen μ negativ und uvw positiv, also eine von ihnen positiv, die beiden andern negativ, oder es müssen alle drei positiv sein und eine der Grössen $\sqrt{u}$, $\sqrt{v}$, $\sqrt{w}$ grösser als die Summe der beiden andern.

*) In der That sind die Focallinien des Cylinders und diejenigen Linien, in denen die erweiterte Ebene derselben den Cylinder durchschneidet, zwei Systeme von parallelen Linien, deren gemeinschaftliche Mittellinie die Achse des Cylinders ist, und sind die Verbindungslinien jeder zwei conjugirten Punkte dieser Linien auf der Achse senkrecht. *H.*

Als Grenze des Ellipsoids und zweiflächigen Hyperboloids erhält man das *elliptische Paraboloid,* wenn u, v, w positiv sind und $\mu = 0$.

Als Grenze des continuirlichen Hyperboloids erhält man das *hyperbolische Paraboloid,* wenn u, v, w negativ sind und $\mu = 0$.

Man kann dies in folgenden Satz zusammenfassen.

Satz.

„Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben: in der Ebene von ABC nehme man einen beliebigen Punkt Q und construire über der Basis $A'B'C'$ mit den Kanten $A'P = AQ$, $B'P = BQ$, $C'P = CQ$ eine Pyramide: wenn der Punkt Q sich in der Ebene des Dreiecks ABC fortbewegt, beschreibt der Punkt P eine Fläche der zweiten Ordnung, deren eine Hauptebene die Ebene der Basis $A'B'C'$ ist, und deren eine Focalcurve dem Dreieck $A'B'C'$ umschrieben ist.

Diese Fläche ist

1) Ein *Ellipsoid,* wenn alle Seiten des Dreiecks ABC grösser als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind, und man mit den Seiten $\sqrt{BC^2 - B'C'^2}$, $\sqrt{CA^2 - C'A'^2}$, $\sqrt{AB^2 - A'B'^2}$ ein Dreieck beschreiben kann.
2) Ein *einflächiges Hyperboloid,* wenn nur eine Seite des Dreiecks ABC oder alle drei kleiner als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind.
3) Ein *zweiflächiges Hyperboloid,*
   a) wenn eine Seite des Dreiecks ABC grösser, die beiden andern kleiner als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind;
   b) wenn alle Seiten des Dreiecks ABC grösser als die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind, man aber mit den Seiten
   $$\sqrt{BC^2 - B'C'^2}, \quad \sqrt{CA^2 - C'A'^2}, \quad \sqrt{AB^2 - A'B'^2}$$
   kein Dreieck construiren kann.
4) Ein *elliptisches* oder *hyperbolisches Paraboloid,* wenn die Seiten des Dreiecks ABC alle grösser oder alle kleiner sind als die entsprechenden des Dreiecks $A'B'C'$ und von den Quadratwurzeln der Differenzen der Quadrate der entsprechenden Seiten die eine gleich der Summe der beiden andern ist.
5) Eine *Umdrehungsfläche,* wenn die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich sind, und zwar ist die Ebene der Basis $A'B'C'$ selber immer die Hauptebene, welche Kreisschnitte giebt.

6) Ein *Kegel*, wenn zwei entsprechende Seiten der Basen gleich sind.
7) Ein *Cylinder*, wenn ausserdem noch die Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten gleich ist.“ —

Ich will jetzt den allgemeineren Fall behandeln, wo die Spitze der über der einen festen Basis errichteten Pyramide sich in einer beliebig gegebenen Ebene bewegt. Es sei ABC die Projection dieser Basis auf die gegebene Ebene, und h, i, k seien die Quadrate der Höhen ihrer Ecken über dieser Ebene. Denkt man sich die beiden Basen in solcher Lage, dass ihre Ecken drei Paare conjugirter Punkte zweier Ellipsoide sind, deren Gleichungen

$$\frac{xx}{mm}+\frac{yy}{nn}+\frac{zz}{pp}=1, \qquad \frac{xx}{m'm'}+\frac{yy}{n'n'}+\frac{zz}{p'p'}=1$$

sind, so werden ABC und die andere Basis $A'B'C'$ in einer Hauptebene, der Ebene der x und y, liegen und wieder die x-Coordinaten der entsprechenden Punkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sich wie $m:m'$, die y-Coordinaten wie $n:n'$ verhalten, woraus, wenn O der Mittelpunkt der Fläche ist, wieder folgt, dass die Dreiecke OBC, OCA, OAB sich wie die Dreiecke $OB'C'$, $OC'A'$, $OA'B'$ verhalten. Hieraus folgt ebenso wie oben, dass, um O als Schwerpunkt sowohl von den Punkten A, B, C wie von den Punkten A', B', C' zu erhalten, man in ihnen dieselben Gewichte anbringen muss. Nennt man diese Gewichte und ihre Summe wieder α, β, γ, μ und Δ, Δ' den Inhalt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, so hat man wieder ganz wie oben:

$$OBC=\frac{\alpha}{\mu}\Delta, \qquad OCA=\frac{\beta}{\mu}\Delta, \qquad OAB=\frac{\gamma}{\mu}\Delta,$$

$$OB'C'=\frac{\alpha}{\mu}\Delta', \quad OC'A'=\frac{\beta}{\mu}\Delta', \quad OA'B'=\frac{\gamma}{\mu}\Delta'.$$

Es wird ferner:

$$OA^2+h-OA'^2=OB^2+i-OB'^2=OC^2+k-OC'^2=p^2.$$

Nennt man wieder:

$$BC^2-B'C'^2=u, \qquad CA^2-C'A'^2=v, \qquad AB^2-A'B'^2=w,$$

so hat man statt der früheren Gleichung folgende:

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\beta w)=\beta w+\gamma v+\mu h=\gamma u+\alpha w+\mu i=\alpha v+\beta u+\mu k.$$

Setzt man den ersten Ausdruck U, so geben die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha h+\beta(w+k)+\gamma(v+h) &= U,\\ \alpha(w+i)+\quad \beta i \quad +\gamma(u+i) &= U,\\ \alpha(v+k)+\beta(u+k)+\quad \gamma k \quad &= U \end{aligned}$$

die Werthe der drei Gewichte und ihrer Summe:

$$\begin{aligned}\alpha &= u(v+w-u)+(2h-i-k)u-(i-k)(v-w),\\ \beta &= v(w+u-v)+(2i-k-h)v-(k-h)(w-u),\\ \gamma &= w(u+v-w)+(2k-h-i)w-(h-i)(u-v),\\ \mu &= 2(vw+wu+uv)-u^2-v^2-w^2\end{aligned}$$

und überdies

$$U = 2uvw+hu(v+w-u)+iv(w+u-v)+kw(u+v-w).$$

Aus den Werthen von α, β, γ folgt

$$\begin{aligned}\alpha\beta w+\gamma\alpha v &= \alpha(U-\mu h),\\ \beta\gamma u+\alpha\beta w &= \beta(U-\mu i),\\ \gamma\alpha v+\beta\gamma u &= \gamma(U-\mu k)\end{aligned}$$

und daraus

$$2(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\beta w) = \mu\{U-(\alpha h+\beta i+\gamma k)\}.$$

Es ist aber ursprünglich U dem Ausdruck

$$\mu p^2+\frac{1}{\mu}(\beta\gamma u+\gamma\alpha v+\alpha\gamma w)$$

gleich gesetzt worden: man hat daher die Gleichung

$$2(U-\mu p^2) = U-(\alpha h+\beta i+\gamma k),$$

woraus

$$2\mu p^2 = U+h\alpha+i\beta+k\gamma$$

und daher, wenn man die obigen Werthe von α, β, γ substituirt:

$$\begin{aligned}\mu p^2 = {} & uvw+hu(v+w-u)+(h-i)(h-k)u\\ & +iv(w+u-v)+(i-k)(i-h)v\\ & +kw(u+v-w)+(k-h)(k-i)w.\end{aligned}$$

Man kann diesen Ausdruck auf merkwürdige Art transformiren. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}\mu p^2 &= uvw+vw(i+k)+wu(k+h)+uv(h+i)\\ &\quad -hu^2-iv^2-kw^2+(h-i)(h-k)u+(i-k)(i-h)v+(k-h)(k-i)w\\ &= (u+i+k)(v+k+h)(w+h+i)-hu^2-iv^2-kw^2\\ &\quad -2h(i+k)u-2i(k+h)v-2k(h+i)w-(i+k)(k+h)(h+i)\\ &= (u+i+k)(v+k+h)(w+h+i)\\ &\quad -h(u+i+k)^2-i(v+k+h)^2-k(w+h+i)^2+4hik.\end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$u+i+k = u''+2\sqrt{ik}, \qquad v+k+h = v''+2\sqrt{kh}, \qquad w+h+i = w''+2\sqrt{hi},$$

so wird

$$\begin{aligned}\mu p^2 &= (u''+2\sqrt{ik})(v''+2\sqrt{kh})(w''+2\sqrt{hi})\\ &\quad -h(u''+2\sqrt{ik})^2-i(v''+2\sqrt{kh})^2-k(w''+2\sqrt{hi})^2+4hik\\ &= u''v''w''+2(\sqrt{ik}.v''w''+\sqrt{kh}.w''u''+\sqrt{hi}.u''v'')-hu''^2-iv''^2-kw''^2.\end{aligned}$$

Die Grössen u^0, v^0, w^0 werden durch die Gleichungen

$$u^0 = u+(\sqrt{i}-\sqrt{k})^2 = B^0C^{02}-B'C'^2,$$
$$v^0 = v+(\sqrt{k}-\sqrt{h})^2 = C^0A^{02}-C'A'^2,$$
$$w^0 = w+(\sqrt{h}-\sqrt{i})^2 = A^0B^{02}-A'B'^2$$

gegeben. Wenn A^0 ein Punkt des Ellipsoids ist, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2} = 1,$$

und man mit dem Halbmesser p eine concentrische Kugel beschreibt, so soll D^0 ein dem Punkte A^0 entsprechender Punkt der Kugel heissen, wenn die Coordinaten von A^0 aus den Coordinaten von D^0 dadurch erhalten werden, dass man sie mit $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, 1 multiplicirt. Sind D^0, E^0, F^0 auf der Kugel den Punkten A^0, B^0, C^0 des Ellipsoids entsprechend, so hat man

$$u^0 = B^0C^{02}-B'C'^2 = E^0F^{02},$$
$$v^0 = C^0A^{2}-C'A'^2 = F^0D^{02},$$
$$w^0 = A^0B^{02}-A'B'^2 = D^0E^{02}.$$

Da die z-Coordinaten entsprechender Punkte des Ellipsoids und der Kugel gleich sind, so sind h, i, k auch die Quadrate der Höhen von D^0, E^0, F^0 über der xy-Ebene. Nennt man ferner D, E, F die Projectionen von D^0, E^0, F^0 auf die xy-Ebene, so wird

$$u = BC^2-B'C'^2 = EF^2,$$
$$v = CA^2-C'A'^2 = FD^2,$$
$$w = AB^2-A'B'^2 = DE^2.$$

Nennt man r^0 den Radius des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises, so wird

$$16r^{02}.D^0E^0F^{02} = u^0v^0w^0;$$

es ist ferner

$$\mu = 16\,DEF^2 = 16D^0E^0F^{02}\cos^2\lambda,$$

wenn λ der Winkel ist, welchen die Ebenen der Dreiecke $D^0E^0F^0$ und DEF mit einander bilden. Man hat daher

$$p^2\mu-u^0v\,w^0 = 16\,D^0E^0F^{02}(p^2\cos^2\lambda-r^{02}),$$

oder wenn man H das Quadrat des Perpendikels vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene des Dreiecks $D^0E^0F^0$ nennt,

$$\begin{aligned} p^2\mu-u^0v^0w^0 &= 16D^0E^0F^{02}(H\cos^2\lambda-r^{02}\sin^2\lambda) \\ &= 2(\sqrt{ik}.v^0w^0+\sqrt{kh}.w^0u^0+\sqrt{hi}.u^0v^0)-(hu^{02}+iv^{02}+kw^{02}). \end{aligned}$$

Nennt man h^0, i^0, k^0, $\mathfrak{H}$ die Quadrate der Perpendikel, die von D^0, E^0, F^0 und vom Mittelpunkte des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises auf die Schneidelinie beider Ebenen gefällt werden, so wird

$$\mathfrak{H} = H.\operatorname{ctg}^2\lambda, \qquad h^0 = \frac{h}{\sin^2\lambda}, \qquad i^0 = \frac{i}{\sin^2\lambda}, \qquad k^0 = \frac{k}{\sin^2\lambda};$$

wenn man daher die vorige Gleichung durch $\sin^2\lambda$ dividirt, erhält man

$$16D^0E^0F^{02}(\mathfrak{H}-r^{02}) = 16D^0E^0F^{02}.\mathfrak{H} - u^0v^0w^0$$
$$= \begin{cases} 2(\sqrt{i^0k^0}.v^0w + \sqrt{k^0h^0}.w^0u^0 + \sqrt{h^0i^0}.u^0v^0) \\ -h^0.u^{02} - i^0.v^{02} - k^0.w^{02}. \end{cases}$$

Auf diese Weise lässt sich der für μp^2 gefundene Ausdruck auf eine Formel der algebraischen Geometrie zurückführen, indem in der vorstehenden Formel $\sqrt{u^0}$, $\sqrt{v^0}$, $\sqrt{w^0}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$, $\sqrt{\mathfrak{H}}$ die Seiten und die aus den Ecken und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf eine beliebige Linie gefällten Perpendikel bedeuten. Die Grösse $\mathfrak{H}-r^{02}$ ist das Quadrat der Tangente, die man an den Kreis vom Fusspunkte des Perpendikels $\sqrt{\mathfrak{H}}$ fällt. Man sieht leicht, dass man in der Formel $\sqrt{\mathfrak{H}}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ um dieselbe Grösse ändern kann, welches darauf hinaus kommt, dass man die gerade Linie parallel mit sich verrückt. Man hat nämlich

$$16D^0E^0F^{02} = 2(v^0w^0 + w^0u^0 + u^0v^0) - u^{02} - v^{02} - w^{02}$$

und nach einem bekannten Satze vom Schwerpunkt

$$16D^0E^0F^{02}.\sqrt{\mathfrak{H}} = u^0(v^0+w^0-u^0)\sqrt{h^0} + v^0(w^0+u^0-v^0)\sqrt{i^0} + w^0(u^0+v^0-w^0)\sqrt{k^0},$$

da der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Schwerpunkt der Punkte D_0, E_0, F_0 ist, wenn man in ihnen die Coefficienten von $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ als Gewichte anbringt, und die Summe dieser Gewichte gleich $16D^0E^0F^{02}$ ist. Wenn man die erste Gleichung mit $(\sqrt{\mathfrak{H}}-r^0)^2$, die zweite mit $-2(\sqrt{\mathfrak{H}}-r^0)$ multiplicirt zu der gefundenen Formel hinzufügt*) und

$$\sqrt{h^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{h'}, \qquad \sqrt{i^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{i'}, \qquad \sqrt{k^0} - \sqrt{\mathfrak{H}} + r^0 = \sqrt{k'}$$

setzt, so erhält man

$$0 = 2(\sqrt{i'k'}.v^0w^0 + \sqrt{k'h'}.w^0u^0 + \sqrt{h'i'}.u^0v^0) - h'u^{02} - i'v^{02} - k'w^{02},$$

wo $\sqrt{h'}$, $\sqrt{i'}$, $\sqrt{k'}$ die auf eine Tangente des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen

*) Das Ergebniss dieser Rechnung kommt damit überein, die Lothe $\sqrt{\mathfrak{H}}$, $\sqrt{h^0}$, $\sqrt{i^0}$, $\sqrt{k^0}$ um $\sqrt{\mathfrak{H}}-r^0$ zu verkürzen, oder, was dasselbe ist, die auf diesen Lothen senkrechte gerade Linie parallel mit sich selbst so zu verschieben, das sie eine Tangente des Kreises um $D^0E^0F^0$ wird. *H.*

Kreises aus D^0, E^0, F^0 gefällten Perpendikel bedeuten. Aus der vorstehenden Gleichung folgt, *dass von den Quadratwurzeln aus den drei Grössen* $u^0\sqrt{h'}$, $v^0\sqrt{i'}$, $w^0\sqrt{k'}$ *oder von den drei Grössen* $E^0F^0\sqrt[4]{h'}$, $F^0D^0\sqrt[4]{i'}$, $D^0E^0\sqrt[4]{k'}$ *eine die Summe der beiden anderen ist.* Man kann die Grössen $\sqrt[4]{h'}$, $\sqrt[4]{i'}$, $\sqrt[4]{k'}$ leicht construiren. Nennt man nämlich T den Berührungspunkt, so wird nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie

$$\sqrt{2r^0.\sqrt{h'}} = D^0T, \quad \sqrt{2r^0.\sqrt{i'}} = E^0T, \quad \sqrt{2r^0.\sqrt{h'}} = F^0T,$$

so dass die drei Grössen

$$E^0F^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{h'}}, \quad F^0D^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{i'}}, \quad D^0E^0.\sqrt{2r^0.\sqrt{k'}}$$

die drei Producte der gegenüberstehenden Seiten und Diagonalen in dem dem Kreise eingeschriebenen Viereck $D^0E^0F^0T$ sind, von denen bekannt ist, dass die Summe von zweien dem dritten gleich ist. Unsre Formel für p^2 wird so auf den sogenannten *Ptolemäi*schen Lehrsatz zurückgeführt, welcher andererseits in dieser Form ausgesprochen durch das Vorstehende eine grosse Ausdehnung erhält.

Wie in dem früheren Falle findet man m und n aus den beiden Gleichungen

$$\frac{mn}{p^2} = \frac{ABC}{DEF} = \frac{4\Delta}{\sqrt{\mu}},$$
$$\frac{m'n'}{p^2} = \frac{A'B'C'}{DEF} = \frac{4\Delta'}{\sqrt{\mu}}.$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass m^2n^2 und $m'^2n'^2$ dasselbe Zeichen wie μ haben, dass also der xy-Schnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem μ positiv oder negativ ist. Die Fläche wird nur dann ein einflächiges Hyperboloid, wenn $m^2n^2p^2$ negativ ist, also wenn μ und p^2 verschiedene Zeichen haben. Die Werthe $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ werden ganz ebenso, wie im einfacheren Fall, durch die Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ausgedrückt, und nur p^2 wird verschieden. Mit Hilfe des früheren Hilfsdreiecks DEF kann man die Grösse p^2 so construiren: Man errichte in den Punkten D, E, F die Perpendikel $\sqrt{h}$, $\sqrt{i}$, $\sqrt{k}$, deren Endpunkte D^0, E^0, F^0 seien, ferner errichte man in dem Mittelpunkt des dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kreises ein Perpendikel auf der Ebene $D^0E^0F^0$ und bestimme den Punkt, in welchem dies Perpendikel die Ebene DEF durchschneidet, dann wird p die Entfernung dieses Punktes von jedem der Eckpunkte D^0, E^0, F^0, (oder, was dasselbe ist, p wird der Radius derjenigen dem Dreieck $D^0E^0F^0$ umschriebenen Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene DEF liegt).